解答例

STEP III 1997、第 7 問

純粋数学 • e の無理性

> **STEP III 1997、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q7

鍵となる考え方

級数（series）a_n は、$n!\,\mathrm{e}$ から整数部分（integer part）を取り除いた残りにほかならない。級数 $\mathrm{e} = \sum 1/k!$ に $n!$ を掛けると、$k = n$ までの各項はすべて整数になり、残りの裾（tail）が a_n になる。等比級数（geometric series）b_n は、a_n を項ごとに上から押さえる扱いやすい上界（upper bound）の役割を果たす。裾が 0 と 1 の間に厳密に収まることがわかれば、e が有理数（rational number）であるとすると、ある $n!\,\mathrm{e}$ が整数でありながら小数部分（fractional part）がゼロでないことになり、これは不合理である。

解答

小問 (i)

級数 b_n は、初項（first term）$\frac{1}{n+1}$、公比（common ratio）$r = \frac{1}{n+1}$ の等比級数である。$n \geq 1$ より $0 < r \leq \frac{1}{2} < 1$ であるから、これは収束（converge）し、

$$b_n = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

である。

小問 (ii)

2 つの級数の第 k 項を

$$u_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \qquad v_k = \frac{1}{(n+1)^k}.$$

と書く。u_k の分母にある k 個の因数 $n+1, n+2, \ldots, n+k$ はどれも $n+1$ 以上であるから、$(n+1)(n+2)\cdots(n+k) \geq (n+1)^k$ であり、したがって

$$0 < u_k \leq v_k \quad \text{任意の} k \geq 1.$$

が成り立つ。等号が成り立つのは $k=1$ のときだけである。$k \geq 2$ では因数 $n+2$ が $n+1$ より真に大きいので、$u_k < v_k$ となる。

すべての項は正であり、収束する級数 b_n の項で上から押さえられているから、（比較判定法（comparison test）により）a_n は収束し、$a_n \geq u_1 > 0$ である。上からの評価については、各項 $v_k - u_k$ が非負であるから、

$$b_n - a_n = \sum_{k\geq 1}(v_k - u_k) \;\geq\; v_2 - u_2 = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

となる。よって $a_n < b_n = \frac{1}{n}$ であり、合わせて

$$0 < a_n < \frac{1}{n},$$

が成り立つ。これが示すべきことであった。

考えてみよう なぜ「a_n の各項が b_n の対応する項以下である」というだけでは、**厳密な**不等式（strict inequality）を導くのに不十分なのだろうか？

項ごとの $\leq$ からは、極限において $a_n \leq b_n$ が得られるだけである。無限個の項を足し合わせると、厳密な不等式が等式に変わってしまうことがある。だからこそ、差が確定した正の量となる 1 つの項 $k=2$ を取り出し、他の差がすべて ≥ 0 であることに注意したのである。

小問 (iii)

級数 $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ を用い、$n!$ を掛けて $k=n$ のところで分ける。

$$n!\,\mathrm{e} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{N} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}.$$

$k \leq n$ のとき $\frac{n!}{k!} = (k+1)(k+2)\cdots n$ は整数であるから、N は正の整数である。$k = n+j$（ただし $j \geq 1$）に対しては

$$\frac{n!}{(n+j)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+j)} = u_j,$$

となるので、裾はちょうど a_n である。したがって、小問 (ii) と $n \geq 1$ を用いると

$$n!\,\mathrm{e} = N + a_n, \qquad N \in \mathbb{Z}, \quad 0 < a_n < \tfrac{1}{n} \leq 1,$$

である。（整数）＋（$[0,1)$ に属する何か）という形の数の整数部分はその整数であるから、$[n!\,\mathrm{e}] = N$ であり、したがって

$$a_n = n!\,\mathrm{e} - [n!\,\mathrm{e}].$$

が成り立つ。

小問 (iv)

背理法（proof by contradiction）で示す。p, q を正の整数として $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ と仮定する。$n = q$ とおく。すると

$$n!\,\mathrm{e} = q! \cdot \frac{p}{q} = (q-1)!\,p$$

は整数であるから、それ自身の整数部分に等しく、小問 (iii) より $a_q = 0$ となる。しかし小問 (ii) によれば $a_q > 0$ である。この矛盾により、e は無理数（irrational number）であることが示された。

（q は $n!$ を割り切るので、$n \geq q$ を満たすものならどれを取っても同様にうまくいく。要点は、ある $n!\,\mathrm{e}$ が整数にならざるを得ないということだけである。）

検算

$n = 1$ のとき、$1!\,\mathrm{e} = 2.71828\ldots$ であるから小数部分は $0.71828\ldots$ であり、$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots$ を足し合わせてもやはり $0.71828\ldots$ となって、$b_1 = 1$ を十分に下回る。$n = 5$ のとき $a_5 \approx 0.19382$ であり、$\frac{1}{5}$ をわずかに下回る。a_n と b_n は初項が一致するので、n が大きくなるにつれて評価は相対的に精密になる。正確な分数を用いたコンピュータによる検証で、1 から 29 までのすべての n について、$0 < a_n < \frac{1}{n}$ であること、および $[n!\,\mathrm{e}] = N$ として $n!\,\mathrm{e} = N + a_n$ が成り立つことが確認されている。

よくある間違い

- すべての k について $u_k \leq v_k$ であるというだけの理由で $a_n < b_n$ と主張すること。不等式を厳密なまま保つには、真に小さい項が 1 つ（ここでは $k = 2$）必要である。
- $\sum_{k \leq n} n!/k!$ が整数である理由を忘れること。それは、$k \leq n$ のとき $k!$ が $n!$ を割り切るからである。
- 小問 (iv) で、$0 < a_n$ だけ、あるいは $a_n < 1$ だけを使うこと。両方が重要である。$a_n < 1$（小問 (ii) より）によって a_n が小数部分であるとわかり、$a_n > 0$ によって矛盾が得られるのである。

STEP のその先へ

これはフーリエ（Fourier）による e の無理性の証明であり、その型（整数でなければならない量が 0 と 1 の間に厳密にあることを示す）は、π や、有理数 $r \neq 0$ に対する e^r の無理性の証明をはじめ、多くの無理性の証明の雛形となっている。大学で最初に学ぶ解析学（analysis）の講義では、比較判定法と e の級数をきちんと正当化し、$\sum 1/k!$ の収束の速さこそがこの議論を成り立たせていることを学ぶだろう。e は、どんな有理数でもありえないほどきわめて良く分数で近似されるのである。Abbott の *Understanding Analysis* は級数の側面を扱っており、Davenport の *The Higher Arithmetic* は有理近似（rational approximation）へのすばらしい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。