解答例

STEP III 1997、第 6 問

純粋数学 ・ チェビシェフの微分方程式

STEP III 1997、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s3-q6

鍵となる考え方

$x = \cos\theta$ の隣にある因子 $1 - x^2$ が示唆するのはただ一つ、$1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$ である。連鎖律（chain rule）を用いて注意深く変数変換すれば、x についての扱いにくい方程式は θ についての単振動（simple harmonic motion）の方程式になる。これを解き、二つの付帯条件を用いて定数を決定する。漸化式（recurrence）は、姿を変えた加法定理（compound-angle identity）にほかならない。以下を通じて、n は非負整数とする。条件 $y_n(x) = (-1)^n y_n(-x)$ はその場合にしか意味をもたない。

解答

変数変換

$0 < \theta < \pi$ として $x = \cos\theta$ とおく。このとき $\sin\theta > 0$ かつ $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta = -\sin\theta \neq 0$ である。記法を簡潔にするため、y_n を y と書く。連鎖律により、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}.$$

もう一度 x で微分するには、θ で微分してから $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -1/\sin\theta$ を掛ければよい。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right) = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)\\ &= \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2} - \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}.\end{aligned}$$

ここで $1-x^2=\sin^2\theta$ と $x=\cos\theta$ を用いて代入すると、

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+n^2y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+n^2y$$
$$=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}+n^2y.$$

二つの1階導関数の項はちょうど打ち消し合う。したがって、与えられた方程式は $\dfrac{\mathrm{d}^2y_n}{\mathrm{d}\theta^2}+n^2y_n=0$ と同値であり、これが示すべきことであった。

考えてみよう なぜ $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ は単に $\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}$ とはならないのか？

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ が $-1/\sin\theta$ と $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$ の**積**だからである。どちらの因子も θ に依存するので、積の微分法（product rule）により二つの項が現れる。この余分な項こそが $-x\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ の項を打ち消すものであり、問題にその項が含まれているのはそのためである。

y_n を求める

$n\geq 1$ のとき、$y''+n^2y=0$ の一般解（general solution）は

$$y_n=A\cos n\theta+B\sin n\theta.$$

である。$n=0$ のときは方程式が $y''=0$ となるので、$y_0=A+B\theta$ である。

$x=1$ における条件。 $x=1$ は $\theta=0$ に対応し、$y_n(1)=1$ からいずれの場合も $A=1$ を得る。

対称性の条件。 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ であるから、x を $-x$ に置き換えることは θ を $\pi-\theta$ に置き換えることを意味し、$\pi-\theta$ もまた $[0,\pi]$ に属する。整数 $n\geq 1$ に対して、

$$\cos n(\pi-\theta)=(-1)^n\cos n\theta,\qquad \sin n(\pi-\theta)=-(-1)^n\sin n\theta.$$

よって $(-1)^n y_n(-x)=(-1)^n[A(-1)^n\cos n\theta-B(-1)^n\sin n\theta]=A\cos n\theta-B\sin n\theta$ である。これがすべての θ について $y_n(x)=A\cos n\theta+B\sin n\theta$ に等しいとおくと $2B\sin n\theta=0$ となり、$B=0$ である。$n=0$ のときは、条件はすべての θ について $1+B\theta=1+B(\pi-\theta)$ となり、やはり $B=0$ が導かれる。

ゆえに、すべての非負整数 n に対して

$$\boxed{y_n=\cos n\theta},\qquad \text{すなわち}\quad y_n(x)=\cos(n\arccos x)\quad(|x|\leq 1).$$

関係式 $\theta=\arccos x$ は $[-1,1]$ を $[0,\pi]$ の上へ写すので、この結果は $|x|\leq 1$ で成り立つ。端点 $x=\pm1$（$\theta=0,\pi$）は連続性（continuity）により含まれる。

結論を導く

$n=0$ と $n=1$ のとき、$y_0=\cos 0=1$、$y_1=\cos\theta=x$ である。

漸化式を得るために、加法定理

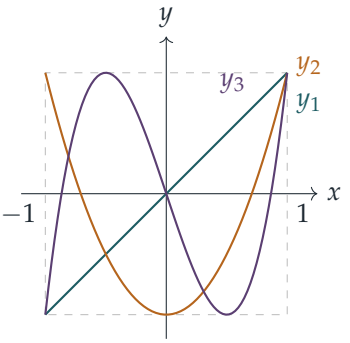
$$\cos(n+1)\theta=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta,\qquad \cos(n-1)\theta=\cos n\theta\cos\theta+\sin n\theta\sin\theta.$$

を辺々加える。正弦の項は打ち消し合い、$\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta$ が残る。これを x で表すと

$$y_{n+1}-2xy_n+y_{n-1}=0\qquad (n\geq 1,\ |x|\leq 1),$$

となり、これが求める結果である。

$y_0=1$ と $y_1=x$ から出発すると、漸化式によって多項式が次々に得られる。$y_2=2x^2-1$、$y_3=4x^3-3x$、$y_4=8x^4-8x^2+1$ などである。



各 y_n は余弦であるから、当然 $[-1,1]$ 上で -1 と 1 の間にとどまる。

検算

- $y_2=2x^2-1$ のとき、$(1-x^2)\cdot 4-x\cdot 4x+4(2x^2-1)=0$ となる。これは $n=2$ の方程式を満たし、$y_2(1)=1$ であり、さらに偶関数である。
- y_n の偶奇性（parity）は $(-1)^n$ と一致する。たとえば $y_3=4x^3-3x$ は奇関数である。
- 数値的には、$x=0.3$ のとき $\cos(2\arccos 0.3)=-0.82=2(0.3)^2-1$ である。$y_n=\cos(n\arccos x)$（$0\leq n\leq 8$）について元の方程式を差分（finite difference）で確かめたところ、残差は 10^{-5} 未満であった。

よくある間違い

- 2 階導関数の計算で積の微分法を忘れ、1 階導関数の項が打ち消し合わなくなる。
- $\sin n\theta$ の解を残してしまう。これは微分方程式と $y_n(1) = 1$ を満たす（$\sin 0 = 0$ であるから）が、対称性の条件を満たさない。この条件は、まさにその解を取り除くために置かれている。
- $n = 0$ の場合を別に扱うのを忘れる。このとき一般解は $A + B\theta$ であり、余弦と正弦の組ではない。

STEP のその先へ

多項式 y_n は**チェビシェフ多項式**（Chebyshev polynomials）$T_n(x)$ である。与えられた方程式はチェビシェフ（Chebyshev）の微分方程式である。私たちが捨てたもう一つの解 $\sin(n \arccos x)$ は、$\sqrt{1 - x^2}$ と多項式の積になる。チェビシェフ多項式は近似理論（approximation theory）の中心にある。次数 n のモニック多項式（monic polynomial）のうちで、$2^{1-n}T_n$ は $[-1, 1]$ 上での最大値の大きさが最小である。多くの数値計算法において T_n の零点が最良の補間点（interpolation points）となるのはこのためである。このような方程式の級数解（series solutions）や、そこから生まれる特殊関数（special functions）については、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（『微分方程式入門』）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。