解答例

STEP III 1997、第 5 問

純粋数学 ・ サイクロイドの弧長

> **STEP III 1997、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q5

鍵となる考え方

転がる車輪の縁上の点は**サイクロイド**（cycloid）を描く。車輪が回転した角度を用いてその点の位置を書き表してしまえば、この問題は単なる弧長（arc length）の積分になる。中心の運動と回転角を結びつけるのは転がり条件（滑らないこと）であり、半角の公式（half-angle identity）を使うと弧長の公式に現れる平方根がきれいに外れる。

解答

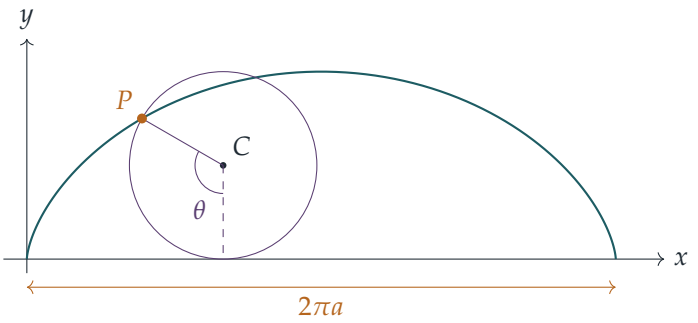
軌跡を設定する

車輪の半径を a とし、車輪が x 軸に沿って滑らずに転がるとする。印をつけた点 P が原点で地面に接している状態から始め、車輪が回転した角度（ラジアン）を θ とする。

滑りがないので、進んだ地面の長さは地面に接した縁の長さに等しい。したがって中心 C は距離 $a\theta$ だけ移動し、$(a\theta, a)$ にある。C から見ると、点 P は最初 C の真下にあり、そこから θ だけ回転している（車輪は右に転がるので時計回りである）。よって P は $C + (-a\sin\theta, -a\cos\theta)$ にある。ゆえに、1 回転について

$$x = a(\theta - \sin\theta), \qquad y = a(1 - \cos\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

が成り立つ。この間に車輪は距離 $2\pi a$ だけ前進する。



弧長

微分すると

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = a(1-\cos\theta), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = a\sin\theta,$$

であるから、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= a^2\left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\\ &= 2a^2(1-\cos\theta)\\ &= 4a^2\sin^2\tfrac{\theta}{2},\end{aligned}$$

となる。ここで $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ を用いた。

考えてみよう 平方根をとるとき、それは $2a\sin\frac{\theta}{2}$ なのか $2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$ なのか。また、ここではその違いが問題になるか。

平方根は常に $2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$ である。$0 \le \theta \le 2\pi$ のとき $0 \le \frac{\theta}{2} \le \pi$ であり、そこでは $\sin\frac{\theta}{2} \ge 0$ となるので、ちょうど1回転の範囲では絶対値を外してよい（それより長い範囲では積分を分割しなければならない）。

したがって、P が移動する距離は

$$s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \left[-4a\cos\tfrac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = -4a(-1) + 4a = 8a.$$

である。

比

車輪が $2\pi a$ 進む間に、その縁上の点は $8a$ 移動する。よって求める比は

$$\frac{2\pi a}{8a} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785.$$

である。これは車輪の大きさによらないが、それは当然である。車輪を拡大・縮小すると、2つの距離はともに同じ倍率で変わるからである。

検算

- 点は車輪よりも長い距離を移動する（$8a > 2\pi a \approx 6.28a$）。点は前進するうえに、上下にそれぞれ $2a$ ずつ動くのだから、これは理にかなっている。実際、$8a$ はちょうど直径の 4 倍である。
- 大まかな評価：軌跡は $(0,0)$ から $(\pi a, 2a)$ まで上がり、$(2\pi a, 0)$ まで下がるので、その長さは少なくとも $2\sqrt{\pi^2 a^2 + 4a^2} \approx 7.45a$ であり、多くとも $2\pi a + 4a \approx 10.28a$ である。値 $8a$ は余裕をもってその間に収まっている。
- 数値的に確かめると、車輪が転がる間の縁上の点を 200 000 か所で追跡し、各区間の直線距離を足し合わせると、$a = 1$ のとき 7.99999999992 となる。よって比は $0.78539816\ldots = \pi/4$ である。

よくある間違い

- 媒介変数表示（parametrisation）の符号を誤る（たとえば $x = a(\theta + \sin\theta)$ とする）。これでは車輪に対して後ろ向きに動く軌跡になってしまう。$\theta = \pi$ で確かめるとよい。このとき P は最上点 $(\pi a, 2a)$ にあるはずである。
- 被積分関数を $a\sqrt{2 - 2\cos\theta}$ のままにして、直接積分しようとする。計算を簡単にするのは半角の公式を使う一歩である。
- 比を逆に書く。問題が求めているのは点の移動距離に対する車輪の移動距離の比であり、それは $\pi/4$ であって $4/\pi$ ではない。

STEP のその先へ

サイクロイドは数学において最も有名な曲線の一つである。サイクロイドは**最速降下曲線**（brachistochrone）、すなわち重力のもとで 2 点間を最も速く降下する曲線であり、また**等時曲線**（tautochrone）、すなわちどこから出発しても玉が同じ時間で最下点に達する曲線でもある。どちらの事実も変分法（calculus of variations）によって証明される。変分法は大学 1、2 年次の力学や数理手法の講義で学ぶものであり、この問題の弧長の計算はどちらの証明においても最初の一歩となる。この趣旨の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* に挑戦するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。