解答例

STEP III 1997、第 4 問

純粋数学 ・ 相加相乗平均の不等式

> **STEP III 1997、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q4

鍵となる考え方

問題文には誤植がある。4 つの根をもつ多項式は 4 次式でなければならず、係数のパターン $1,4,6,4,1$ から、意図された多項式は

$$\mathrm{f}(x) = x^4 - 4ax^3 + 6b^2x^2 - 4c^3x + d^4.$$

であることがわかる。係数は、a, b^2, c^3, d^4 のそれぞれが**平均**になるように選ばれている。すなわち、根の平均、2 つずつの積の平均、3 つずつの積の平均、そして 4 つすべての積の平均である。各不等式は、f、f′ または f″ の根に相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）を適用することで得られ、それらの根が依然として相異なる正の数であることはロルの定理（Rolle's theorem）によって保証される。

解答

$\mathrm{f}(x) = (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$ とおく。係数を比較すると、

$$p+q+r+s = 4a, \qquad pq+pr+ps+qr+qs+rs = 6b^2,$$
$$pqr+qrs+rsp+spq = 4c^3, \qquad pqrs = d^4.$$

小問 (i)

$P = pqrs = d^4$ とおく。どの根も 0 ではないから、

$$pqr = \frac{P}{s}, \quad qrs = \frac{P}{p}, \quad rsp = \frac{P}{q}, \quad spq = \frac{P}{r}.$$

写像 $t \mapsto P/t$ は正の実数上で単射（one-to-one）であり、p, q, r, s は相異なるので、4 つの積は相異なる。

小問 (ii)

3 つずつの 4 つの積は相異なる正の数であるから、相加相乗平均の不等式より

$$c^3 = \frac{pqr + qrs + rsp + spq}{4} > (pqr \cdot qrs \cdot rsp \cdot spq)^{1/4} = ((pqrs)^3)^{1/4} = (d^4)^{3/4} = d^3.$$

各根は 4 つの積のうちちょうど 3 つに現れるので、積は $(pqrs)^3$ となる。$c, d > 0$ であり $t \mapsto t^3$ は増加関数であるから、$c^3 > d^3$ より $c > d$ が得られる。

小問 (iii)

$0 < p < q < r < s$ となるように根に名前をつける。多項式 f は微分可能で、p と q で 0 になるので、ロルの定理より f′ は $p < \alpha < q$ を満たす根 α をもつ。同様にして、根 $\beta \in (q, r)$ と $\gamma \in (r, s)$ が存在する。これらの開区間は重ならないので、$\alpha < \beta < \gamma$ は相異なる。f′ は 3 次式であるから、これ以外の根はもたない。また、$\alpha > p > 0$ であるから、3 つの根はすべて正であることにも注意する。

小問 (iv)

微分すると、

$$\mathrm{f}'(x) = 4x^3 - 12ax^2 + 12b^2x - 4c^3 = 4(x^3 - 3ax^2 + 3b^2x - c^3),$$

であるから、α, β, γ は $x^3 - 3ax^2 + 3b^2x - c^3$ の根であり、

$$\alpha + \beta + \gamma = 3a, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3b^2, \qquad \alpha\beta\gamma = c^3.$$

これは次数が 1 つ下がった同じパターンなので、小問 (i) と (ii) をそのまま繰り返せばよい。2 つずつの積は $\alpha\beta = c^3/\gamma$、$\beta\gamma = c^3/\alpha$、$\gamma\alpha = c^3/\beta$ であり、α, β, γ が相異なる正の数であるから、これらは相異なる。相加相乗平均の不等式より、

$$b^2 = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{3} > ((\alpha\beta\gamma)^2)^{1/3} = c^2,$$

であり、$b, c > 0$ であるから $b > c$ が得られる。

考えてみよう f′ に相加相乗平均の不等式を使う前に、なぜ小問 (iii) が必要なのだろうか。

相加相乗平均の不等式は正の実数にしか適用できず、しかもここでは等号が成り立たない厳密な形が必要である。3 次式は、そもそも 3 つの実数解をもつとは限らない。α, β, γ が相異なる正の実数であること、したがって 2 つずつの積もそうであることを保証しているのは、ロルの定理なのである。

小問 (v)

同じ議論をもう一度適用する。f′ は相異なる根 $\alpha < \beta < \gamma$ をもつので、ロルの定理より

$$f''(x) = 12x^2 - 24ax + 12b^2 = 12(x^2 - 2ax + b^2),$$

の根 $\mu \in (\alpha, \beta)$ と $\nu \in (\beta, \gamma)$ が得られ、これらは相異なる正の数である。よって $\mu + \nu = 2a$、$\mu\nu = b^2$ であり、2 数の相加相乗平均の不等式より、

$$a = \frac{\mu + \nu}{2} > \sqrt{\mu\nu} = b.$$

（同じことであるが、$x^2 - 2ax + b^2$ は相異なる 2 つの実数解をもつので、その判別式（discriminant）$4a^2 - 4b^2$ は正であり、a, b はともに正であるから $a > b$ となる。）以上により、

$$a > b > c > d.$$

が示された。

検算

- 根が $1, 2, 3, 4$ のとき：$4a = 10$、$6b^2 = 35$、$4c^3 = 50$、$d^4 = 24$ であるから、$a = 2.5$、$b \approx 2.415$、$c \approx 2.321$、$d \approx 2.213$ となり、正しい順序になっている。
- 4 つの根がすべて k に等しければ、$f(x) = (x - k)^4$ であり $a = b = c = d = k$ となる。厳密な不等式を得るために根が相異なることが必要なのはこのためである。
- ほとんど一致する場合も含めて、相異なる 4 つの正の根の組を無作為に 20 000 組試したところ、毎回 $a > b > c > d$ が成り立った。

よくある間違い

- f の根に直接相加相乗平均の不等式を適用すること。これで $a > d$ は得られるが、中間の項を分離することはできない。
- 相加相乗平均の不等式に用いる数が相異なる正の数であることの確認を忘れること。これこそが小問 (i) と (iii) の要点である。
- すべての文字が正であることに触れずに、$c^3 > d^3$ や $b^2 > c^2$ から $c > d$ や $b > c$ を導くこと。

STEP のその先へ

量 a, b, c, d は根の**対称平均**（symmetric means）であり、不等式の連鎖 $a > b > c > d$ は**マクローリンの不等式**（Maclaurin's inequality）の特別な場合である。すなわち、正の実数に対して、k 個ずつの積の平均の k 乗根は、k が増えるにつれて減少する。平均を変えずに次数を下げるために微分するという技法は、ニュートンの不等式（Newton's inequalities）を示す標準的な方法でもある。さらに詳しくは、Steele の *The Cauchy–Schwarz Master Class*（不等式の入門書）、あるいはハーディ（Hardy）、リトルウッド（Littlewood）、ポリア（Pólya）による古典 *Inequalities*（『不等式』）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。