解答例

STEP III 1997、第 3 問

純粋数学 • 1 の冪根

> **STEP III 1997、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q3

鍵となる考え方

1 の n 乗根（nth roots of unity）$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ はちょうど $z^n - 1$ の根であるから、この多項式は完全に因数分解できる。そこから因数 $z - 1$ を割り去れば最初の恒等式が得られる。O を原点として正多角形を複素平面上に置くと、各頂点は 1 の n 乗根に $re^{i\theta}$ を掛けたものになる。すると、ベクトルの和は等比級数（geometric series）となり、弦の長さの 2 乗は $|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1|^2$ を内積（dot product）で展開することで求まる。

解答

積の恒等式

$k = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して $(\omega^k)^n = e^{2\pi i k} = 1$ であるから、各 ω^k は $z^n - 1 = 0$ の根である。これら n 個の数は相異なる。実際、それらの偏角（argument）$2\pi k/n$ は相異なり、すべて $[0, 2\pi)$ に属するからである。最高次の係数が 1 で、相異なる n 個の根をもつ n 次多項式は、対応する 1 次因数の積に等しいので、

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}).$$

一方、等比級数の和を考えれば（あるいは単に展開すれば）、

$$z^n - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}).$$

$z \neq 1$ であるすべての z について両辺を $z - 1$ で割ることができ、

$$(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} \qquad (z \neq 1).$$

を得る。

考えてみよう 問題文には「任意の複素数 z」とある。割り算ができない $z=1$ の場合はどうなるだろうか。

両辺はともに $n-1$ 次の多項式であり、$z\neq 1$ である無限個の点で一致する。したがって、その差は無限個の根をもつ多項式であるから、零多項式である。（あるいは、両辺は z について連続であるから、$z\to 1$ とすればよい。）よって、この恒等式は $z=1$ も含めてすべての複素数 z について成り立ち、題意が示された。

ベクトルの和

円を含む平面を、O を原点とする複素平面とみなし、A_k を表す複素数を a_k と書く。$a_1=re^{i\theta}$ とし、頂点を反時計回りに順に番号付けると（隣り合う頂点が O において張る角は $2\pi/n$ である）、

$$a_k=re^{i\theta}\,\omega^{k-1},\qquad k=1,2,\dots,n.$$

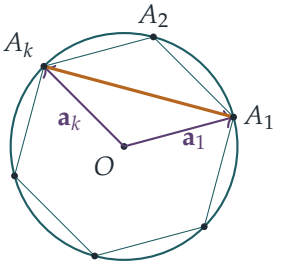
となる。（時計回りに番号付けた場合は、ω を $\bar{\omega}=\omega^{n-1}$ に置き換えるだけであり、これも同じ根の集合を動く。そもそも和は頂点の順序によらない。）

ベクトル $\overrightarrow{OA_k}$ は複素数 a_k に対応し、ベクトルの和は複素数の和に対応する。したがって、求めるべきものは

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=re^{i\theta}\left(1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}\right).$$

である。括弧の中は、恒等式の右辺に $z=\omega$ を代入したものである。左辺の因数の中には（$n\geq 2$ のとき）ω が現れるので、左辺は因数 $\omega-\omega=0$ をもち、括弧の中は 0 となる。（同様に、これは公比 $\omega\neq 1$ の等比級数であるから、$(\omega^n-1)/(\omega-1)=0$ に等しい。）よって

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}.$$



距離の 2 乗の和

今度は $\mathbf{a}_k = \overrightarrow{OA_k}$ をベクトルとして書く。すると、すべての k について $|\mathbf{a}_k| = r$ であり、$\overrightarrow{A_1A_k} = \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1$ である。内積を用いて展開すると、

$$\begin{aligned} |A_1A_k|^2 &= (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1)\cdot(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1) \\ &= |\mathbf{a}_k|^2 + |\mathbf{a}_1|^2 - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k \\ &= 2r^2 - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k. \end{aligned}$$

これは $k = 1$ のときにも成り立つ（このとき両辺とも 0 である）。$k = 1, \ldots, n$ について和をとり、内積が和に対して分配法則を満たすことを用いると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |A_1A_k|^2 &= 2r^2 n - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}_k\right) \\ &= 2r^2 n - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{0} = 2r^2 n, \end{aligned}$$

となる。ここで前の小問の結果を用いた。これが求める結果である。

検算

- $n = 2$ のとき：恒等式は $z - (-1) = 1 + z$ となる。2 点は直径の両端であるから、和は $0 + (2r)^2 = 4r^2 = 2r^2 \cdot 2$ である。
- $n = 4$、$r = 1$ のとき：正方形の 1 つの頂点からの距離の 2 乗は $0, 2, 4, 2$ であり、合計は $8 = 2 \cdot 1^2 \cdot 4$ である。
- 数値的に、$n \le 20$、半径、回転角を無作為に選んだ 2000 通りについて、ベクトルの和は 0 となり、弦の長さの 2 乗の和は誤差 10^{-14} 以内で $2r^2 n$ に一致した。積の恒等式も、無作為な z（および $z = 1$）において同じ精度で確認した。

よくある間違い

- $z - 1$ で割ったあと、その時点では恒等式が $z \neq 1$ についてしか証明されていないことを忘れる。
- $|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1|^2 = |\mathbf{a}_k|^2 - |\mathbf{a}_1|^2$ と書いてしまう。交差項 $-2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k$ こそが要点である。

STEP のその先へ

積の恒等式に $z = 1$ を代入して絶対値をとると、$|1-\omega|\,|1-\omega^2|\cdots|1-\omega^{n-1}| = n$ が得られる。すなわち、単位円に内接する正 n 角形の 1 つの頂点から引いた弦の長さの

積はちょうど n であり、ここで扱った2乗の和とよい対をなす。$z^n - 1$ を1の n 乗根を用いて因数分解することは、円分多項式（cyclotomic polynomial）や離散フーリエ変換（discrete Fourier transform）の出発点であり、どちらも大学の講義の早い段階で出会うものである。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を図形的に解説した書）は、この種の幾何学が複素数を用いてどのように展開されるかを見るのに最適な一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。