解答例

STEP III 1997、第 2 問

純粋数学 • 曲線の概形

> **STEP III 1997、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q2

鍵となる考え方

対数（logarithm）をとると $x^y = y^x$ は $y\ln x = x\ln y$ となり、さらに xy で割ると $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(y)$ が得られる。したがって後半は、実は前半についての問題なのである。f の各値を与える入力がいくつあるかがわかれば、各 x に対して相手となる y がいくつあるかがわかる。この方程式には常に自明な解 $y = x$ がある。興味の対象はもう一つの解である。

解答

f のグラフ

商の微分法（quotient rule）を用いて微分すると、

$$\mathrm{f}'(t) = \frac{t\cdot\frac{1}{t} - \ln t}{t^2} = \frac{1-\ln t}{t^2}, \qquad \mathrm{f}''(t) = \frac{2\ln t - 3}{t^3}.$$

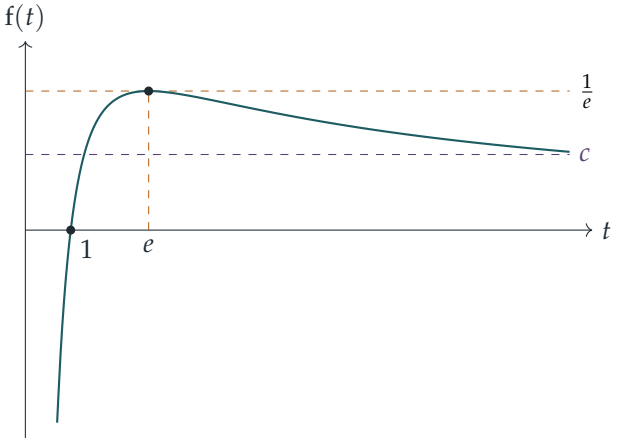
よって $0 < t < e$ では $\mathrm{f}'(t) > 0$、$t > e$ では $\mathrm{f}'(t) < 0$ である。すなわち f は $(0, e]$ で狭義単調増加（strictly increasing）、$[e, \infty)$ で狭義単調減少（strictly decreasing）である。最大値は

$$\mathrm{f}(e) = \frac{1}{e}.$$

である。概形を描くためのその他の特徴は次のとおりである。

- $0 < t < 1$ では $\mathrm{f}(t) < 0$、$\mathrm{f}(1) = 0$、$t > 1$ では $\mathrm{f}(t) > 0$ である。
- $t \to 0^+$ のとき $\ln t \to -\infty$ かつ $1/t \to +\infty$ であるから、$\mathrm{f}(t) \to -\infty$ となる。すなわち y 軸は漸近線（asymptote）である。

- $t \to \infty$ のとき、$\ln t$ は t よりもゆっくり増加するので $\mathrm{f}(t) \to 0^+$ である。よって t 軸は漸近線である。
- $t = e^{3/2}$ に変曲点（point of inflection）があり、そこでは $\mathrm{f} = \frac{3}{2}e^{-3/2} \approx 0.33$ である。個数を数えるためには不要だが、これによって概形が正確なものになる。



値 c を与える t はいくつあるか

f は $(0,e]$ と $[e,\infty)$ のそれぞれにおいて連続（continuous）かつ狭義単調（strictly monotonic）であるから、各部分は到達する値をちょうど一度ずつとる。$(0,e]$ では f は $-\infty$ から $\frac{1}{e}$ まで増加し、$[e,\infty)$ では $\frac{1}{e}$ から 0 に向かって減少するが、決して 0 には達しない。したがって、与えられた値 c に対して次が成り立つ。

- $c > \frac{1}{e}$：t の値は**存在しない**。
- $c = \frac{1}{e}$：$t = e$ の**一つ**だけである。
- $0 < c < \frac{1}{e}$：$(1,e)$ に一つ、(e,∞) に一つの**二つ**である（概形図の水平線 c を参照）。
- $c \le 0$：$(0,1]$ に**一つ**だけである。減少する側の枝は常に正の値をとるからである。

$x^y = y^x$ の解の個数

$x, y > 0$ のとき両辺は正であるから、対数をとってよい。ln は一対一（one-to-one）であるから、解が増えたり失われたりすることはない。

$$x^y = y^x \iff y\ln x = x\ln y \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y} \iff \mathrm{f}(y) = \mathrm{f}(x),$$

ここで $xy > 0$ で割った。よって、x を固定したとき、正の y の個数は、$c = \mathrm{f}(x)$ として $\mathrm{f}(t) = c$ を満たす t の個数に等しい。そのうちの一つは常に $y = x$ である。

考えてみよう 上の四つの場合のうち、$c = \mathrm{f}(x)$ が実際に当てはまりうるのはどれか。

c は f の値であるから、$c > \frac{1}{e}$ の場合は起こりえない。残りの場合を x に関する条件に言い換えると次のようになる。

- $0 < x \leq 1$：このとき $c = \mathrm{f}(x) \leq 0$ であるから、y はちょうど**一つ**、すなわち $y = x$ である。
- $x = e$：このとき $c = \frac{1}{e}$ であるから、y はちょうど**一つ**、すなわち $y = e$ である。
- $1 < x < e$ または $x > e$：このとき $0 < c < \frac{1}{e}$ であるから、y の値はちょうど**二つ**、すなわち $y = x$ ともう一つである。$1 < x < e$ ならばもう一つは (e, ∞) にあり、$x > e$ ならば $(1, e)$ にある。

たとえば、$2^4 = 4^2 = 16$ であるから、$x = 2$ の相手は $y = 4$ である。

解集合の概形

解集合は、直線 $y = x$（すべての $x > 0$ について）と、「もう一つの」解からなる第二の曲線とを合わせたものであり、後者は完全に $x > 1$、$y > 1$ の範囲にある。その形状は次のとおりである。

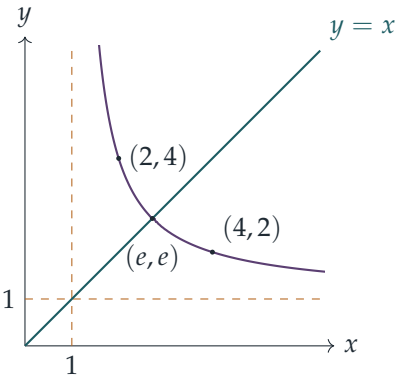
- **対称性。** 方程式は x と y を入れ替えても変わらないので、この曲線は直線 $y = x$ に関して対称（symmetric）である。
- **減少。** x が $(1, e)$ の範囲で増加すると $\mathrm{f}(x)$ は増加するので、相手の $y > e$ は f がより大きくなる位置へ移らなければならない。すなわち y は減少する。$x > e$ についても同様である。よってこの枝の上で y は x の減少関数である。
- **漸近線。** $x \to 1^+$ のとき $\mathrm{f}(x) \to 0^+$ であるから、相手は $y \to \infty$ となる。すなわち直線 $x = 1$ は漸近線である。対称性により、$x \to \infty$ のとき $y \to 1^+$ であり、$y = 1$ は漸近線である。
- **直線 $y = x$ との交差。** $x \to e$ のとき相手も e に近づくので、曲線は (e, e) を通り、そこで直線と交わる。$t = e$ の近くでは、$\mathrm{f}'(e) = 0$ および $\mathrm{f}''(e) = -e^{-3}$ を用いたテイラー（Taylor）の定理（Taylor's theorem）により $\mathrm{f}(t) \approx \frac{1}{e} - \frac{(t-e)^2}{2e^3}$ となる。よって $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(y)$ から $(y-e)^2 \approx (x-e)^2$、すなわち $y - e \approx \pm(x-e)$ が導かれる。正の符号は直線 $y = x$ に対応する。負の符号がわれわれの曲線であり、したがってこの曲線は傾き -1 で直線と直角に交わる。

考えてみよう この曲線を陽に書き表すことはできるか。

できる。比を用いてパラメータ表示（parametrise）すればよい。$t > 0$、$t \neq 1$ として $y = tx$ とおく。すると $x^{tx} = (tx)^x$ となり、両辺の x 乗根をとると $x^t = tx$、よって $x^{t-1} = t$ であり、

$$x = t^{1/(t-1)}, \qquad y = t^{t/(t-1)}.$$

を得る。$t = 2$ のとき $(2,4)$ を、$t = \frac{1}{2}$ のとき $(4,2)$ を与える。$t \to 1$ のとき、$t^{1/(t-1)} \to e$ であるから、両座標はともに e に近づく。下の曲線はこの方法で描いたものである。



検算

- $2^4 = 4^2$ はよく知られた整数の例であり、予想どおり $1 < x < e$ と $x > e$ の範囲で曲線上にある。
- 数値的には、細かい格子探索により f の最大値は $t \approx 2.718$ でとられ、その値は $0.367879 \approx 1/e$ である。二分法（bisection）によると、$x = 1.01$ の相手は $y \approx 659$、$x = 100$ の相手は $y \approx 1.050$ である。これらは漸近線 $x = 1$ および $y = 1$ と整合する。
- $x = e$ における中心差分（central difference）により、第二の枝の傾きは -1.0000 となる。

よくある間違い

- $x \neq e$ ならばどの x にも相手が二つあると主張してしまうこと。$0 < x \leq 1$ では値 $\mathrm{f}(x)$ は正でなく、$y = x$ しか解にならない。
- 最終的な概形図で直線 $y = x$ を描き忘れること。あるいはもう一方の枝を、(e,e) で直線と交わるのではなく接するように描いてしまうこと。
- xy で割る代わりに、$\ln x$ や $\ln y$（これらは 0 になりうる）で割ってしまうこと。

STEP のその先へ

第二の曲線は $\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(y)$ の等位集合（level set）であり、(e,e) はその関数の勾配（gradient）が 0 になる点である。そのため、そこでは一本のなめらかな曲線が通過するのではなく、二本の枝が交差するのである。大学一年次の解析学（analysis）で学ぶ陰関数定理（implicit function theorem）は、等位集合が局所的にグラフとなるのはどのような場合か、またそうならないときに何が起こるかを説明してくれる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、その基礎を築くのに親しみやすい一冊である。方程式 $x^y = y^x$ そのものにも長い歴史がある。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題集）には、この趣旨の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。