解答例

STEP III 1997、第 14 問

確率・統計 ・ 確率変数の積

> **STEP III 1997、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q14

鍵となる考え方

周囲の長さは縦と横の長さの線形関数（linear function）であるから、その平均（mean）と分散（variance）は独立（independent）な確率変数の和に関する規則からただちに得られる。面積は積であり、独立な確率変数については積の期待値（expectation）は期待値の積に等しい。これを LB と L^2B^2 に適用すれば、平均と分散が求まる。独立でないことを示すには、0 でない共分散（covariance）を見つけるのが最も手際よい。独立な確率変数の共分散は常に 0 だからである。

解答

無作為に選んだ板の縦の長さを L、横の長さを B とする。L と B は独立で、

$$\mathrm{E}(L) = \mu_1, \quad \mathrm{Var}(L) = \sigma_1^2, \qquad \mathrm{E}(B) = \mu_2, \quad \mathrm{Var}(B) = \sigma_2^2.$$

を満たす。周囲の長さを $P = 2(L + B)$、面積を $A = LB$ とする。以下では $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + [\mathrm{E}(X)]^2$ を繰り返し用いる。特に $\mathrm{E}(L^2) = \mu_1^2 + \sigma_1^2$、$\mathrm{E}(B^2) = \mu_2^2 + \sigma_2^2$ である。

周囲の長さ

期待値の線形性（linearity of expectation）により、

$$\mathrm{E}(P) = 2(\mu_1 + \mu_2).$$

L と B は独立であるから、和の分散は分散の和に等しい。よって

$$\mathrm{Var}(P) = 2^2(\mathrm{Var}(L) + \mathrm{Var}(B)) = 4(\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \qquad \text{標準偏差}(P) = 2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

面積

L と B は独立であるから $\mathrm{E}(LB) = \mathrm{E}(L)\,\mathrm{E}(B)$ であり、

$$\mathrm{E}(A) = \mu_1\mu_2.$$

分散を求めるには $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(L^2B^2)$ が必要である。

考えてみよう $\mathrm{E}(L^2B^2)$ もやはり積に分解できるだろうか？

できる。独立な確率変数の関数どうしは独立であるから、L^2 と B^2 は独立であり、$\mathrm{E}(L^2B^2) = \mathrm{E}(L^2)\,\mathrm{E}(B^2)$ となる。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(A) &= \mathrm{E}(L^2)\,\mathrm{E}(B^2) - \mu_1^2\mu_2^2\\ &= (\mu_1^2+\sigma_1^2)(\mu_2^2+\sigma_2^2) - \mu_1^2\mu_2^2\\ &= \sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2,\end{aligned}$$

であり、

$$\text{標準偏差}(A) = \sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2}.$$

積の分散は単なる $\sigma_1^2\sigma_2^2$ **ではない**ことに注意しよう。一方の辺のばらつきは、もう一方の辺の典型的な大きさによって拡大されるのである。

周囲の長さと面積は独立でない

もし P と A が独立ならば $\mathrm{E}(PA) = \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)$、すなわち $\mathrm{Cov}(P, A) = 0$ となるはずである。そこで共分散を計算する。まず、

$$\mathrm{E}(PA) = 2\,\mathrm{E}(L^2B) + 2\,\mathrm{E}(LB^2).$$

再び独立性を用いると（今度は L^2 と B の独立性、および L と B^2 の独立性である）、

$$\mathrm{E}(L^2B) = (\mu_1^2+\sigma_1^2)\mu_2, \qquad \mathrm{E}(LB^2) = \mu_1(\mu_2^2+\sigma_2^2).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(P, A) &= \mathrm{E}(PA) - \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)\\ &= 2[(\mu_1^2+\sigma_1^2)\mu_2 + \mu_1(\mu_2^2+\sigma_2^2)] - 2(\mu_1+\mu_2)\mu_1\mu_2\\ &= 2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2).\end{aligned}$$

縦と横の長さは正であるから $\mu_1 > 0$、$\mu_2 > 0$ である。また標準偏差（standard deviation）は 0 でないと与えられているから $\sigma_1^2 > 0$、$\sigma_2^2 > 0$ である。よって $\mathrm{Cov}(P, A) > 0$ である。

独立な確率変数の共分散は 0 であるから、P と A は独立ではありえない。これは直観にも合う。どちらかの方向に平均より大きい板は、周囲の長さも面積も大きくなりやすいからである。

> **考えてみよう** もし共分散が 0 になっていたら、P と A が独立であることが示されたことになるだろうか？

ならない。この含意は一方向にしか成り立たない。独立ならば共分散は必ず 0 になるが、共分散が 0 だからといって独立になるとは限らない。したがって、共分散が 0 でないことは独立でないことを証明し、それこそがここで得られたことである。一方、共分散が 0 であったとしても何もわからなかったはずである。

検算

- L と B を独立とし、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で 1 または 3 をとるとする。このとき $\mu_i = 2$、$\sigma_i^2 = 1$ であり、公式から $\mathrm{Cov}(P, A) = 2(2+2) = 8$ が得られる。これは同様に確からしい 4 通りの板を直接数え上げた結果と一致する。独立でないことも直接確かめられる。$\mathrm{P}(P=4) = \mathrm{P}(A=1) = \frac{1}{4}$ であるが、どちらの事象も $L = B = 1$ を意味するので、$\mathrm{P}(P=4 \text{ かつ} A=1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{16}$ となる。
- $\mu_1 = 5$、$\mu_2 = 3$、$\sigma_1 = 0.7$、$\sigma_2 = 0.4$ としたシミュレーションでは、標準偏差$(A) \approx 2.919$（公式では 2.913）、$\mathrm{Cov}(P, A) \approx 4.56$（公式では 4.54）となった。
- $\sigma_2 \to 0$（横の長さが μ_2 に固定）とすると 標準偏差$(A) \to \mu_2\sigma_1$ となり、$A = \mu_2 L$ の場合として当然の結果になる。

よくある間違い

- $\mathrm{Var}(LB) = \sigma_1^2\sigma_2^2$ としたり、項の欠けた $\mathrm{Var}(LB) = \mathrm{Var}(L)\mathrm{Var}(B) + \ldots$ を書いたりすること。必ず $\mathrm{E}(L^2B^2)$ を経由して計算すること。
- $\mathrm{Var}(2(L+B))$ において係数 2 を 2^2 乗し忘れること。
- 「どちらも L と B に依存するから」という理由で P と A が独立でないと論じること。それは直観であって証明ではない。決着をつけるのは共分散の計算（あるいは確率が一致しない具体例）である。

STEP のその先へ

無相関（uncorrelated）な確率変数と独立な確率変数の区別は、大学 1 年次の確率論の中心的な話題である。独立性とは同時分布（joint distribution）が積に分解されることを意味し、これはただ 1 つのモーメント（moment）に関する条件よりはるかに強い。また、$\mathrm{Var}(LB)$ の計算は、実験科学のあらゆる場面で用いられる「誤差の伝播（propagation of errors）」の公式の出発点でもある。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、独立性、共分散、確率変数の積を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。