解答例

STEP III 1997、第 13 問

確率・統計 ・ 正規分布の積率母関数

> **STEP III 1997、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q13

鍵となる考え方

すべては一つの積分に帰着する。それは標準正規分布（standard normal distribution）の積率母関数（moment generating function, mgf）であり、指数部分を平方完成（completing the square）することで求められる。そのあとは、独立性（independence）によって和の積率母関数が積に変わり、積率母関数の一意性（uniqueness）によって分布を読み取ることができる。最後の小問は、形を変えた同じ計算である。$Z = \mathrm{e}^{\mu+\sigma X}$ のべき乗は、X の定数倍の指数関数にすぎない。

解答

小問 (i)

$M(\theta) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X})$ とおく。このとき

$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2-2\theta x)}\,\mathrm{d}x.$$

平方完成すると $x^2 - 2\theta x = (x-\theta)^2 - \theta^2$ であるから、$u = x - \theta$ と置換して

$$M(\theta) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u,$$

を得る。最後の積分は標準正規分布の確率密度関数（probability density function）の全体での積分であり、その値は 1 である。したがって、任意の実数 θ に対して

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2}.}$$

小問 (ii)

X と Y は独立であるから、$e^{\theta aX}$ と $e^{\theta bY}$ も独立であり、独立な確率変数（random variable）の積の期待値（expectation）はそれぞれの期待値の積に等しい。小問 (i) の θ を $a\theta$ および $b\theta$ に置き換えたものを用いると（Y が X と同じ分布に従うことにも注意して）、

$$\mathrm{E}(e^{\theta(aX+bY)}) = \mathrm{E}(e^{a\theta X})\,\mathrm{E}(e^{b\theta Y}) = e^{\frac{1}{2}a^2\theta^2}\,e^{\frac{1}{2}b^2\theta^2} = e^{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\theta^2}.$$

考えてみよう 積率母関数が一致すれば分布の問題が決着するのはなぜか。

0 の近くのすべての θ で存在する積率母関数は、分布をただ一つに定める。よって $aX+bY$ が X と同じ分布に従うのは、その積率母関数がすべての θ について $e^{\frac{1}{2}\theta^2}$ に等しいとき、すなわち

$$e^{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\theta^2} = e^{\frac{1}{2}\theta^2} \quad \text{すべての}\theta.$$

が成り立つときであり、かつそのときに限る。対数をとり、$\theta \neq 0$ を任意に一つ選べば、これが成り立つための必要十分条件は

$$\boxed{a^2+b^2=1.}$$

である。（「必要」の向きは一意性を使わなくても明らかである。$\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2+b^2$ は $\mathrm{Var}(X) = 1$ に等しくなければならない。）一般に $aX+bY$ は平均 0、分散（variance）a^2+b^2 の正規分布（normal distribution）に従う。たとえば $(X+Y)/\sqrt{2}$ は再び標準正規分布に従う。

小問 (iii)

任意の実数 θ に対して

$$Z^\theta = (e^{\mu+\sigma X})^\theta = e^{\mu\theta}\,e^{(\sigma\theta)X},$$

であり、$e^{\mu\theta}$ は定数であるから、小問 (i) の θ を $\sigma\theta$ に置き換えたものにより

$$\mathrm{E}(Z^\theta) = e^{\mu\theta}\,\mathrm{E}(e^{(\sigma\theta)X}) = e^{\mu\theta}\,e^{\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2} = e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2},$$

となり、示すべき式が得られた。

$\theta = 1$ とおくと平均が得られる。

$$\boxed{\mathrm{E}(Z) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}.}$$

$\theta = 2$ とおくと $\mathrm{E}(Z^2) = e^{2\mu+2\sigma^2}$ となるから、

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{E}(Z^2) - (\mathrm{E}(Z))^2 = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} \\ &= e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1).\end{aligned}$$

検算

- $M(\theta) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2}$ を微分すると $M'(0) = 0$、$M''(0) = 1$ となる。平均 0、分散 1 であり、当然そうなるべき値である。
- $\sigma = 0$ ならば $Z = \mathrm{e}^{\mu}$ は定数である。得られた公式は平均 e^{μ}、分散 0 を与える。
- 数値的には、$\mu = 0.3$、$\sigma = 0.5$ として正規分布の密度関数に対して積分すると $\mathrm{E}(Z) \approx 1.5296$、$\mathrm{Var}(Z) \approx 0.6645$ となり、$\mathrm{e}^{0.425}$ および $\mathrm{e}^{0.85}(\mathrm{e}^{0.25} - 1)$ と一致する。$0.6X + 0.8Y$ のシミュレーションでは標本分散は 1.000 であった。

よくある間違い

- 「X の平均を代入して」$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{e}^{\mu}$ と書いてしまうこと。一般に $\mathrm{E}(g(X)) \neq g(\mathrm{E}(X))$ であり、ここでは指数関数の凸性（convexity）によって平均が因子 $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2}$ だけ押し上げられる。
- 条件を $a + b = 1$ としてしまうこと。足し合わされるのは係数ではなく分散である。

STEP のその先へ

確率変数 Z は**対数正規分布**（log-normal distribution）に従う。これは、多数の小さなランダムな因子を掛け合わせて成長していく量、たとえばブラック–ショールズモデル（Black–Scholes model）における株価などに対する標準的なモデルである。小問 (ii) は、ある印象的な事実を垣間見せている。すなわち、分散が有限な分布のうち、適切にスケールを調整した和が同じ分布族にとどまるものは本質的に正規分布しかない、という事実であり、これは中心極限定理（central limit theorem）と深く結びついている。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、積率母関数、正規分布、中心極限定理をちょうどこのレベルで扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。