解答例

STEP III 1997、第 11 問

力学 ・ 剛体の回転

STEP III 1997、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s3-q11

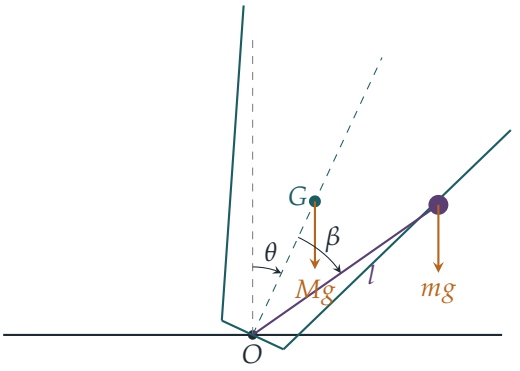
鍵となる考え方

接触している間、鐘と舌（clapper）は同じ点 O のまわりを同じ角速度（angular velocity）で回転するので、両者を引き離しうるのは角**加速度**（angular acceleration）の差だけである。それぞれが単独で動いたらどれだけの角加速度をもつかを考えよう。舌と鐘が離れるのは、自由に振れる鐘の角加速度が、自由な舌の角加速度にちょうど等しくなる瞬間である。そのとき接触力はちょうど 0 であり、角速度はまったく関係しない。

解答

モデル。鐘は O を通る水平な軸のまわりに自由に回転できる剛体（rigid body）であり、その軸のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は Mk^2 である。舌は長さ l の軽い剛体の棒の先についた質量 m の質点であり、やはり O で回転できるように支えられている。支点はなめらかで、空気抵抗はないとする。角度はすべて**上向き**の鉛直方向から測り、軸から見て舌がある側の向きを正とする。鐘の軸 OG の角度を θ とする。両者が接触している間、舌の棒は軸に対して角 β を保つので、その角度は $\theta + \beta$ である。

鐘の内部で、舌の球は倒れようとする側の内壁に寄りかかっている。したがって壁は球を押し戻し（角度が小さくなる向き）、ニュートンの第 3 法則（Newton's third law）により、球は鐘を前へ押す。この接触力（摩擦があればそれも含む）の O のまわりのモーメントを $\Gamma \geq 0$ とする。これは舌には $-\Gamma$、鐘には $+\Gamma$ として作用する。



接触中の運動方程式。それぞれの物体について別々に O のまわりのモーメントをとる（支点での抗力と棒の張力は O のまわりにモーメントをもたない）。

$$\text{舌：}\quad ml^2\ddot{\theta} = mgl\sin(\theta+\beta) - \Gamma,$$
$$\text{鐘：}\quad Mk^2\ddot{\theta} = Mgh\sin\theta + \Gamma.$$

重力 mg は、鉛直方向と角 $\theta+\beta$ をなす直線上で O から距離 l の点に作用するので、そのモーメントは $mgl\sin(\theta+\beta)$ である。G に作用する Mg についても同様である。両者は一緒に動くので、同じ $\ddot{\theta}$ をもつ。

2 式を足すと Γ が消去される。

$$\ddot{\theta} = \frac{g(ml\sin(\theta+\beta) + Mh\sin\theta)}{ml^2 + Mk^2}.$$

これを舌の方程式に代入して整理すると、

$$\Gamma = \frac{mMgl}{ml^2+Mk^2}\Big(k^2\sin(\theta+\beta) - hl\sin\theta\Big).$$

放した瞬間は $\theta = 0$ で $\Gamma = \dfrac{mMglk^2\sin\beta}{ml^2+Mk^2} > 0$ となるので、当然のことながら、最初は舌が鐘を押している。

考えてみよう 角速度がいくらであっても、ちょうど Γ が 0 に達したときに離れるのはなぜか。

接触力は押すことしかできないので、$\Gamma \geq 0$ でなければならない。$\Gamma > 0$ である間は、自由な舌の角加速度の方が鐘より大きいので、舌は壁に押しつけられ、両者は一緒に動く。両者は同じ点 O のまわりを同じ角速度で回転しているので、球と壁の間にすき間が生じるのは角加速度の差によるほかない。Γ が負になろうとするところで、鐘自身の角加速度 $gh\sin\theta/k^2$ が舌の角加速度 $g\sin(\theta+\beta)/l$ を上回り、壁が球から離れていく。したがって、離れるのは $\Gamma = 0$ となる最初の θ においてである。（括弧内は

$\theta = 0$ で $k^2 \sin\beta > 0$、$\theta = \pi$ で $-k^2 \sin\beta < 0$ であるから、そのような θ は $\theta = \pi$ より前に必ず存在する。）

離れる角度。$\alpha = \theta + \beta$ とおく。これは離れる瞬間に舌の棒が上向きの鉛直方向となす角である。すると $\Gamma = 0$ より

$$k^2 \sin\alpha = hl \sin(\alpha - \beta) = hl(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta).$$

ここで $0 < \alpha < \pi$ より $\sin\alpha \neq 0$ であり、また $\sin\beta \neq 0$ である。$hl\sin\alpha\sin\beta$ で割ると

$$\frac{k^2}{hl\sin\beta} = \cot\beta - \cot\alpha,$$

すなわち

$$\cot\alpha = \cot\beta - \frac{k^2}{hl}\operatorname{cosec}\beta,$$

となり、示すべき式が得られた。どちらの質量も現れないことに注意しよう。

検算

- **短い舌**。$l \to 0$ のとき補正項は発散するので、$\cot\alpha \to -\infty$、$\alpha \to \pi$ となる。これは妥当である。短い振り子は自由な角加速度 $g\sin\alpha/l$ が大きいので、非常に短い棒についた舌は $\sin\alpha$ がほぼ 0 になるまで、つまり両者がほぼ逆さまになるまで鐘を押し続ける。
- **同値な形**。この条件は単に $\dfrac{g\sin\alpha}{l} = \dfrac{gh\sin(\alpha-\beta)}{k^2}$ である。つまり、自由な舌と自由な鐘の角加速度が等しいということである。
- **数値による確認**。$k = 1$、$h = 0.6$、$l = 0.8$、$\beta = 30^\circ$ とすると、公式より $\cot\alpha = \sqrt{3} - 25/6 \approx -2.43$ となり、$\alpha \approx 157.7^\circ$ である。放した瞬間から一体となった運動を数値的に段階を追って積分し、Γ が初めて 0 になったところで止めると、$M/m = 5$ でも $M/m = 500$ でも、小数点以下何桁にもわたって同じ角度が得られる。

よくある間違い

- エネルギー保存則を使って $\dot\theta$ を求め、円運動から「垂直抗力」を求めようとすること。角速度は両方の物体に共通であり、離れるかどうかには関係しない。
- α を上向きの鉛直方向からではなく、鐘の軸から測ってしまうこと。接触している間、棒は軸に対して常に角 β をなすので、$\alpha = \theta + \beta$ である。
- Mk^2 が G のまわりではなく O のまわりの慣性モーメントであることを忘れること。ここでは平行軸の定理（parallel axis theorem）による補正は必要ない。

STEP のその先へ

これは、拘束（constraint）が破れる時点を求める一般的な原理のよい例である。拘束された運動を解き、拘束力を計算し、それが符号を変える点を求めればよい。ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）では、ラグランジュの未定乗数（Lagrange multipliers）を用いてこれを系統的に行う。この乗数は拘束力そのものであることがわかる。同じ考え方から、球面上を滑る質点が面を離れるという古典的な問題も解ける。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は固定軸のまわりの剛体の回転を扱っており、優れた準備となる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。