解答例

STEP III 1997、第 10 問

力学 ・ 滑りを伴う転がり

> **STEP III 1997、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q10

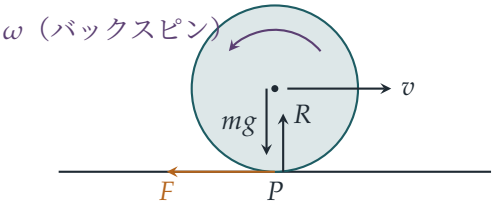
この問題は、*Beyond STEP* の第 11.6 節「**バックスピン**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/backspin.html

鍵となる考え方

重要なのは、ビー玉の底がテーブルの上を滑っているかどうかである。滑っている間は摩擦力（friction）の大きさも向きも一定なので、並進運動も回転運動も等加速度で減速し、正確に式で表すことができる。接触点がテーブルに対して静止した時点で滑りは終わり、その後ビー玉は摩擦力をまったく受けずに転がる。したがって、この問題は結局、$v = 0$、$\omega = 0$、滑り速度（slip velocity）が 0 になること、のうちどれが最初に起こるかという問題である。

解答

モデル化。 ビー玉を質量 m、半径 a の一様な中実球とするので、直径のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は $I = \frac{2}{5}ma^2$ である。中心の速度を v（v_0 の向きを正）とし、角速度（angular velocity）ω は**後ろ向き**の回転を正とする（バックスピン（backspin）を正とする）。すると $v(0) = v_0 > 0$、$\omega(0) = \omega_0 > 0$ である。指は運動を始めさせるだけであり、その後にはたらく力は、重力 mg、垂直抗力（normal reaction）$R = mg$、接触点 P における摩擦力 F である。



バックスピンがあると、ビー玉の底は中心に対して速さ $a\omega$ で前向きに動くので、接触点の速度は

$$s = v + a\omega.$$

である。最初は $s = v_0 + a\omega_0 > 0$ であり、ビー玉はテーブルの上を前向きに滑るので、摩擦力は**後ろ向き**に一定の大きさ F ではたらく。$F = mk$ とおく。

滑っている間の運動方程式。 水平方向の力を考えると $m\dot{v} = -F$ である。中心のまわりのモーメントを考えると、底にはたらく後ろ向きの摩擦力はビー玉を前向きに転がる向きに回すので、バックスピンを減らす：

$$\tfrac{2}{5}ma^2\,\dot{\omega} = -Fa \quad\Longrightarrow\quad \dot{\omega} = -\frac{5k}{2a}.$$

どちらも一定なので、ビー玉が前向きに滑り続ける限り

$$v = v_0 - kt, \qquad a\omega = a\omega_0 - \tfrac{5}{2}kt, \qquad s = v_0 + a\omega_0 - \tfrac{7}{2}kt.$$

である。よって滑り速度は

$$t_1 = \frac{2(v_0 + a\omega_0)}{7k},$$

で 0 になり、それまで摩擦力の向きは変わらないので、途中で v や ω の符号が変わったとしても、これらの式は区間 $0 \le t \le t_1$ 全体で成り立つ。

> ? **考えてみよう** $t = t_1$ で何が起こるか。また、なぜビー玉はその後、逆向きに滑り始めないのか。

t_1 において接触点は静止しているので $v = -a\omega$ であり、ビー玉は転がっている（rolling）。一定の速さで転がり続けるなら、何かが押す必要はないので、摩擦力（滑りがなくなれば、必要な大きさだけはたらけばよい）は 0 であり、等速で転がることはすべての方程式と矛盾しない。よって t_1 以降、ビー玉は速度

$$V = v(t_1) = v_0 - \tfrac{2}{7}(v_0 + a\omega_0) = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7}.$$

で一様に転がる。

小問 (i)

最終的に完全に静止するには、最後の転がりの速度が 0 でなければならない。すなわち $V = 0$ より $5v_0 = 2a\omega_0$、つまり

$$\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{2}{5}.$$

である。状況が妥当であることを確かめておく。この比のとき、$v = 0$ となるのは $t = v_0/k$、$\omega = 0$ となるのは $t = 2a\omega_0/(5k) = v_0/k$ で同時刻であり、これは t_1 でもある。したがって、並進運動と回転運動はビー玉がまだ滑っている間に同時に消え、その後は静止したままである（滑りがなく、摩擦力もない）。

小問 (ii)

今度は、ビー玉が最終的に速さ $v_0/7$ で後ろ向きに転がらなければならないので、$V = -v_0/7$ である：

$$\frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7} = -\frac{v_0}{7} \quad \Longrightarrow \quad 6v_0 = 2a\omega_0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{1}{3}.$$

この比のとき、v は $t = v_0/k$ で 0 になり、これは $t_1 = 2(v_0 + 3v_0)/(7k) = 8v_0/(7k)$ より前である。この瞬間、ビー玉は一瞬静止するが、まだバックスピン $\omega = \omega_0 - \frac{5v_0}{2a} = \frac{v_0}{2a} > 0$ をもつので、底はなお前向きに滑っており、摩擦力はビー玉を後ろへ引き続ける。t_1 では $v = -v_0/7$、$a\omega = v_0/7$ となるので、ビー玉は求められているとおり、速さ $v_0/7$ で出発点に向かって転がって戻る。

> ? **考えてみよう** t_1 を求めずに V を得る、もっと速い方法はあるか。

ある。運動の直線上にある、テーブル面上の固定点 O のまわりの角運動量（angular momentum）を考える。摩擦力はテーブル面に沿ってはたらくので O のまわりのモーメントをもたず、R と mg のモーメントは打ち消し合う。前向きに転がる向きを正とすると、O のまわりの角運動量は mva（中心の高さは a）からスピンの部分 $\frac{2}{5}ma^2\omega$ を引いたものであり、これが保存される：

$$mv_0a - \tfrac{2}{5}ma^2\omega_0 = maV + \tfrac{2}{5}ma^2 \cdot \frac{V}{a} = \tfrac{7}{5}maV,$$

よって再び $V = (5v_0 - 2a\omega_0)/7$ が得られる。

検算

- スピンがない場合（$\omega_0 = 0$）、式は $V = \frac{5}{7}v_0$ を与える。これは、スピンなしで滑りながら打ち出された球についてのよく知られた結果である。

- $v_0 = 0$ でバックスピンだけの場合、$V = -\frac{2}{7}a\omega_0 < 0$ となる。バックスピンをかけてビー玉をはじいたことがある人なら誰でも知っているとおり、ビー玉は後ろ向きに動く。
- 方程式を数値的に時間発展させると（滑り速度が 0 になったら摩擦力を切る）、$v_0 = 1$、$a\omega_0 = 3$ のとき最終速度 $-0.142857\ldots = -\frac{1}{7}$ が得られ、$v_0 = 2$、$a\omega_0 = 5$ のとき完全に静止する。

よくある間違い

- $v = 0$ の時点で時計を止めてしまうこと。ビー玉が滑らなくなるのは $v + a\omega = 0$ のときだけである。小問 (ii) のように、$v = 0$ のときにまだスピンが残っていることがある。
- トルク（torque）の符号を間違えること。底にはたらく後ろ向きの摩擦力はバックスピンを減らす。
- 転がり始めた後も摩擦力をはたらかせ続けること。滑りがなくなれば、等速運動に摩擦力は必要ないので、摩擦力は 0 になる。

STEP のその先へ

ここでの摩擦力は、クーロン（Coulomb）による滑り摩擦のモデルである。面どうしが滑っている間は大きさが一定で、滑っていないときは（ある限度まで）必要なだけの大きさになる。角運動量を用いた近道は、剛体力学（rigid-body dynamics）における一般的な原理の一例である。すなわち、扱いにくい未知の力がモーメントをもたないように基準点を選ぶのである。スヌーカーやビリヤードの選手は、引き球（screw-back）でまさにこの物理を利用している。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の回転や滑りを伴う転がりをこうした考え方で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。