解答例

STEP III 1997、第 1 問

純粋数学 • 指数関数のべき級数

> **STEP III 1997、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q1

鍵となる考え方

$\mathrm{e}^x = \sum x^n/n!$ に多項式を掛けると、級数（series）の項がずれる。すると x^n の係数（coefficient）は $1/n!$、$1/(n-1)!$、$1/(n-2)!, \ldots$ の一次結合となり、共通の分母 $n!$ で通分すると分子は n の多項式になる。$x = 1$ を代入すれば、冪級数（power series）の恒等式が数値の級数についての恒等式に変わる。したがって、この問題は結局、望みの分子を生み出す多項式をいかに選ぶかという問題である。**下降階乗**（falling factorial）n、$n(n-1)$、$n(n-1)(n-2)$ が自然な構成要素となる。なぜなら $n(n-1)\cdots(n-k+1)/n! = 1/(n-k)!$ だからである。

解答

以下を通して、$\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0} x^n/n!$ はすべての実数 x に対して絶対収束（absolute convergence）する。これに多項式を掛けたものはこのような級数の有限和であるから、級数を項別に足し合わせてから $x = 1$ とおいてよい。負の整数 m に対しては $1/m! = 0$ と約束する。こうすると、以下のすべての和を $n = 0$ から始めることができる。

小問 (i)

次が成り立つ。

$$(x^2 + 5x + 4)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+2}}{n!} + 5\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n!} + 4\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

x^n の係数をまとめるために、最初の二つの和の添字を付け替える。係数は

$$\frac{1}{(n-2)!}+\frac{5}{(n-1)!}+\frac{4}{n!}=\frac{n(n-1)+5n+4}{n!}$$
$$=\frac{n^2+4n+4}{n!}=\frac{(n+2)^2}{n!}.$$

となる。これは $n=0$ と $n=1$ を含むすべての $n\geq 0$ について成り立つ。これらの場合には、約束 $1/m!=0$ によって存在しない項が消える。($n=0$ のとき係数は $4=2^2/0!$、$n=1$ のとき $5+4=9=3^2/1!$ である。) よって

$$(x^2+5x+4)\,\mathrm{e}^x=\sum_{n\geq 0}\frac{(n+2)^2}{n!}\,x^n,$$

であり、$x=1$ とおくと

$$10\,\mathrm{e}=\frac{2^2}{0!}+\frac{3^2}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\frac{5^2}{3!}+\cdots=4+\frac{3^2}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\cdots,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

今度は一般項が $(n+1)^2/n!$ なので、級数の係数が

$$\frac{n(n-1)+bn+c}{n!}=\frac{(n+1)^2}{n!}.$$

となるような二次式 x^2+bx+c を求めたい。

考えてみよう 当て推量に頼らずに b と c を求めるにはどうすればよいか？

目標の分子を下降階乗で書く：$n^2+2n+1=n(n-1)+3n+1$。係数を比較すると $b=3$、$c=1$ を得る。したがって、小問 (i) とまったく同じ議論により

$$(x^2+3x+1)\,\mathrm{e}^x=\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2}{n!}\,x^n,$$

であり、$x=1$ とおくと

$$(1+3+1)\,\mathrm{e}=5\,\mathrm{e}=1+\frac{2^2}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{4^2}{3!}+\cdots.$$

を得る。

小問 (iii)

一般項は $(n+1)^3/n!$ なので、今度は三次式が必要である。$(ax^3+bx^2+cx+d)\,\mathrm{e}^x$ における x^n の係数は

$$\frac{a}{(n-3)!}+\frac{b}{(n-2)!}+\frac{c}{(n-1)!}+\frac{d}{n!}=\frac{a\,n(n-1)(n-2)+b\,n(n-1)+c\,n+d}{n!}.$$

である。目標を下降階乗で展開する。$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$ かつ $n^2 = n(n-1) + n$ であるから、

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= [n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n] + 3[n(n-1) + n] + 3n + 1 \\ &= n(n-1)(n-2) + 6n(n-1) + 7n + 1.\end{aligned}$$

（簡単な検算：$n = 1$ のとき両辺はともに 8 である。$n = 2$ のとき $27 = 0 + 12 + 14 + 1$。）よって $a = 1$、$b = 6$、$c = 7$、$d = 1$ であり、

$$(x^3 + 6x^2 + 7x + 1)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)^3}{n!}\, x^n.$$

$x = 1$ とおくと

$$1 + \frac{2^3}{1!} + \frac{3^3}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \cdots = (1 + 6 + 7 + 1)\,\mathrm{e} = 15\,\mathrm{e}.$$

考えてみよう なぜ級数を項ごとに単純に 2 乗したり 3 乗したりできないのか？

$\sum (n+1)^3/n!$ は $\sum (n+1)/n!$ から単純な方法で組み立てられるものではないからである。和は分子について線形であるから、私たちにできるのは、分子を $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ という部分に分けることである。各部分は $n!$ と約分されて、e の級数をずらしたものを与える。そのような各部分は $x = 1$ においてちょうど e を与える。したがって答えは、下降階乗の係数の和 $1 + 6 + 7 + 1 = 15$ に e を掛けたものとなる。

検算

- $n = 60$ までの部分和は 27.1828…、13.5914…、40.7742… となり、計算機の精度で 10e、5e、15e と一致する。
- 三つの分子の恒等式における係数は、$n = 0, \ldots, 39$ について厳密に確認した。
- 整合性：小問 (ii) の級数は $\sum (n+1)^2/n!$、小問 (i) の級数は $\sum (n+2)^2/n!$ である。その差 $\sum (2n+3)/n! = 2\sum n/n! + 3\sum 1/n! = 2\mathrm{e} + 3\mathrm{e} = 5\mathrm{e}$ は確かに $10\mathrm{e} - 5\mathrm{e}$ に等しい。

よくある間違い

- 和の添字を付け替えるとき、最初の二項（$n = 0, 1$）に別途注意が必要であることを忘れる。$m < 0$ に対する約束 $1/m! = 0$ によって処理できるが、確認はしておくべきである。

► $(n+1)^3$ を下降階乗ではなく冪 n^3, n^2, n と比較してしまい、誤った三次式を選ぶ。

STEP のその先へ

和 $\sum_{n\geq 0} n^k/n!$ は $B_k\,\mathrm{e}$ に等しい。ここで B_k は第 k ベル数（Bell number）（k 個の対象からなる集合を分割する方法の数）であり、$B_0, \ldots, B_4 = 1, 1, 2, 5, 15$ である。これはドビンスキー（Dobiński）の公式である。実際、$m = n+1$ とおくと、小問 (iii) は $\sum_{m\geq 1} m^4/m! = B_4\,\mathrm{e} = 15\,\mathrm{e}$ であり、係数 $1, 6, 7, 1$ は第 2 種スターリング数（Stirling numbers of the second kind）$1, 7, 6, 1$ を逆順に並べたものである。冪級数を項別に並べ替えたり組み合わせたりすることは絶対収束によって正当化される。これは大学 1 年次の解析学の主題の一つである。理論については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を、この種の問題をさらに解くには Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。