解答例

STEP II 1997、第 9 問

力学 ・ 摩擦と剛体のつり合い

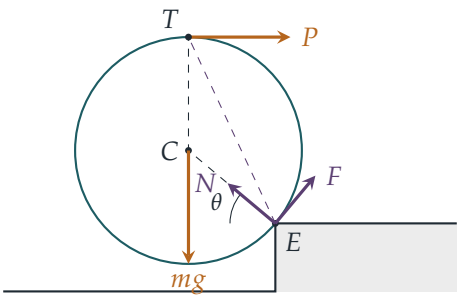
> **STEP II 1997、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q9

鍵となる考え方

球はゆっくりと引き上げられるので、各瞬間において平衡（equilibrium）状態にある。したがって、各位置で静力学（statics）の問題を解けばよい。球が地面を離れた後は、球にはたらく力は重力、最上点での引く力、段の角での抗力（reaction）の三つだけである。角のまわりの力のモーメント（moments）を考えると未知の抗力が消え、引く力が求まる。さらに三力のつり合いの規則（三つの力の作用線（line of action）は一点で交わらなければならない）から抗力の向きが正確にわかり、摩擦（friction）の条件はほとんど労せずに得られる。

解答

半径を $r = \frac{1}{2}d$ とおくと、段の高さは $\frac{1}{4}d = \frac{1}{2}r$ である。球を一様（uniform）な剛体（rigid body）とみなし、段とは角 E のみで接するとする（E は水平な直線であり、中心を通る鉛直断面では一点となる）。C を中心、T を最上点とし、T に段の方向へ水平な力 P がはたらくとする。EC が水平となす角を θ とする。



幾何的な関係

E を原点とすると、C は E より高さ $r\sin\theta$ だけ上、水平距離 $r\cos\theta$ だけ離れた位置にあり、T はさらに C より r だけ上にある。はじめ球が地面に置かれているとき、C は地面から高さ r、すなわち E より $\frac{1}{2}r$ だけ上にある。よって $\sin\theta = \frac{1}{2}$、$\theta = \frac{\pi}{6}$ である。球が完全に段の上に乗るのは C が E の真上に来るとき、すなわち $\theta = \frac{\pi}{2}$ のときである。したがって、この運動は θ が $\frac{\pi}{6}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで増加することに対応する。

力の最大値

球が地面に接している間は、地面が重力の一部を支えており、地面は上向きにしか押せない。球が浮き上がり始めるのは、P が地面からの抗力をちょうど 0 にするだけの大きさになったときである。それ以降、はたらく力は T における P、C における重力 mg、そして E における角からの抗力であり、抗力は EC 方向の垂直成分 N と、EC に垂直な摩擦力 F からなる。

E のまわりのモーメントを考える（抗力は E のまわりにモーメントをもたない）。P の腕の長さは E から測った T の高さ $r(1+\sin\theta)$ であり、重力の腕の長さは $r\cos\theta$ である。つり合いより

$$P\,r(1+\sin\theta) = mg\,r\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{mg\cos\theta}{1+\sin\theta}.$$

$\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ において分子は減少し分母は増加するので、P は θ について減少する。（浮き上がる前は、P はこの値まで増えていくだけである。）したがって最大値は地面を離れる瞬間 $\theta = \frac{\pi}{6}$ でとり、

$$P_{\max} = \frac{mg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{mg}{\sqrt{3}}.$$

摩擦の条件

考えてみよう 角における抗力はどの向きを向いているか。

平行でない三つの力がつり合っているとき、それらの作用線は一点で交わる（共点（concurrent）である）。P の作用線は T を通る水平線であり、重力の作用線は C を通る鉛直線で、これは T も通る。よって両者は T で交わり、E における抗力の合力は ET に沿ってはたらかなければならない。

ここで $CE = CT = r$ なので、三角形 CET は二等辺三角形（isosceles triangle）である。C における CT（鉛直上向き）と CE（水平より角 θ だけ下向き）のなす角は $\frac{\pi}{2}+\theta$ であるから、底角はそれぞれ

$$\angle CET = \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\theta}{2}.$$

これは抗力の合力と法線 EC のなす角であるから

$$\frac{F}{N} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right).$$

力を分解することでこれを確かめられる。抗力は P と重力につり合うので $(-P,\ mg)$ である。単位法線ベクトル $(-\cos\theta, \sin\theta)$ 方向の成分と単位接線ベクトル $(\sin\theta, \cos\theta)$ 方向の成分は

$$N = P\cos\theta + mg\sin\theta = mg\,\frac{\cos^2\theta + \sin\theta + \sin^2\theta}{1+\sin\theta} = mg,$$
$$F = mg\cos\theta - P\sin\theta = mg\cos\theta\left(1 - \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right) = \frac{mg\cos\theta}{1+\sin\theta},$$

となる。よって $F/N = \cos\theta/(1+\sin\theta)$ であり、半角の公式（half-angle formulae）によりこれは $\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$ に等しい。F と N はつねに正であるから、角は確かに球を押しており、摩擦力は図のように接線の上向きにはたらく。

E ですべらないための条件は、すべての位置で $F \le \mu N$、すなわち

$$\mu \ge \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{すべての} \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

が成り立つことである。右辺は θ の増加とともに減少するので、最も厳しい位置はやはり $\theta = \frac{\pi}{6}$ であり、そこで右辺は $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ に等しい。この瞬間、摩擦力は垂直抗力（normal reaction）の $1/\sqrt{3}$ 倍以上でなければならない。ちょうど $\mu = 1/\sqrt{3}$ のときは摩擦が限界摩擦（limiting friction）となり、球はすべり出す寸前の状態になる。したがって、すべらせずに確実に引き上げるには $\mu > 1/\sqrt{3}$ が必要であり、これが示すべきことであった。

検算

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき中心は角の真上にあり、$P = 0$ かつ $F = 0$ となる。これは当然そうなるべき結果である。
- つねに $N = mg$ である。これは納得がいく。抗力は $(-P, mg)$ であり、その法線方向の成分を計算するとちょうど mg になるからである。
- 数値的に、θ を $\frac{\pi}{6}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで少しずつ動かし、モーメントと力の分解をそれぞれ独立に計算すると、P/mg と F/N の最大値はいずれも $0.57735\ldots = 1/\sqrt{3}$ であり、どちらもはじめの位置でとる。

よくある間違い

- E のまわりの P の腕の長さを、$r(1+\sin\theta)$（T の高さ）ではなく $r\sin\theta$（C の高さ）としてしまう。
- 角における抗力が法線方向の成分だけであると仮定してしまう。それはありえない。法線は C を通るので、そうすると三つの力が一点で交わらなくなる。

STEP のその先へ

三力のつり合いの議論は、より一般的な事実の特別な場合である。剛体が平衡にあるのは、力の合計と、任意の一点のまわりのモーメントの合計がともに 0 であるとき、かつそのときに限る。そして三つの力の場合、このことから作用線が一点で交わることが導かれる。抗力と法線のなす角（ここでは $\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$）は「摩擦角（angle of friction）」の考え方であり、これによって摩擦の問題を幾何の問題に置き換えることができる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これらの原理から剛体の静力学と動力学を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。