解答例

STEP II 1997、第 8 問

純粋数学 • 積分による不等式

> **STEP II 1997、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q8

鍵となる考え方

$(x^p-1)/p$ という形の式はどれも、実は積分を姿を変えて表したものである。すなわち、それは $\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t$ に等しい。したがって、このような二つの式の比較は、被積分関数（integrand）t^{p-1} と t^{q-1} の比較に帰着する。大小関係が $t=1$ で入れ替わることに気づけば、この比較は容易である。最後の不等式は、もう一度積分すれば得られる。今度は、直前に証明した不等式そのものを積分するのである。

解答

不等式を積分する

$[a,b]$ 上で $\mathrm{f}(t)\geq \mathrm{g}(t)$ ならば、そこで $\mathrm{f}-\mathrm{g}\geq 0$ である。よって $\mathrm{f}-\mathrm{g}$ のグラフと t 軸の間の領域は軸上またはその上側にあり、その符号付き面積（signed area）は非負である：

$$\int_a^b \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b \mathrm{g}(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b (\mathrm{f}(t)-\mathrm{g}(t))\,\mathrm{d}t\geq 0.$$

ここで $a\leq b$ が必要であることに注意する。積分の上端と下端が逆になっていると、積分どうしの不等号の向きは逆転する。

$x\geq 1$ の場合

$t\geq 1$ かつ $p>q$ のとき、$t^{p-1}=t^{q-1}t^{p-q}\geq t^{q-1}$ が成り立つ。$t\geq 1$ かつ $p-q>0$ ならば $t^{p-q}\geq 1$ だからである。$x\geq 1$ であるから、区間 $[1,x]$ の端点は正しい順序に並ん

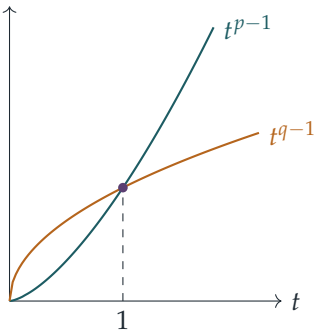
でいる。よって前半の結果により

$$\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_1^x t^{q-1}\,\mathrm{d}t.$$

$p, q > 0$ であるから、どちらの積分も直接計算できる：

$$\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^p}{p}\right]_1^x = \frac{x^p - 1}{p}, \qquad \int_1^x t^{q-1}\,\mathrm{d}t = \frac{x^q - 1}{q}.$$

したがって、$x \geq 1$ に対して $\dfrac{x^p - 1}{p} \geq \dfrac{x^q - 1}{q}$ であり、これが示すべきことであった。



この図（$p = 2.5$、$q = 1.5$ として描いたもの）が要点を示している。指数の大きいほうの累乗は、$t > 1$ では大きく、$0 < t < 1$ では小さくなる。

$0 \leq x \leq 1$ の場合

考えてみよう $0 < t < 1$ では、t^{p-1} と t^{q-1} の間の不等号の向きが逆になる。それなのに、なぜ結論の向きは逆にならないのだろうか。

二つの逆転が打ち消し合うのである。$0 < t \leq 1$ では $t^{p-q} \leq 1$ であるから、$t^{p-1} \leq t^{q-1}$ となる。しかし今度は $x \leq 1$ なので、正しい順序の区間は $[1, x]$ ではなく $[x, 1]$ である。

まず $0 < x \leq 1$ とする。$t^{q-1} \geq t^{p-1}$ を $[x, 1]$ 上で積分すると（$x > 0$ であるから、どちらもそこで連続である）

$$\int_x^1 t^{q-1}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_x^1 t^{p-1}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{1 - x^q}{q} \;\geq\; \frac{1 - x^p}{p}.$$

両辺に -1 を掛けると不等号の向きが逆転し、$\dfrac{x^p - 1}{p} \geq \dfrac{x^q - 1}{q}$ を得る。

$x = 0$ のときは直接確かめる。不等式は $-\frac{1}{p} \geq -\frac{1}{q}$ となるが、$p > q > 0$ より $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$ なので、これは正しい。（$x = 0$ を別に扱うのは、$q < 1$ のとき t^{q-1} が 0 の近くで有界でないからである。）よって不等式はすべての $0 \leq x \leq 1$ で成り立ち、前の場合と合わせて、すべての $x \geq 0$ で成り立つ。

最後の不等式

$\phi_p(t) = \dfrac{t^p - 1}{p}$ とおく。これまでに、$p > q > 0$ ならば、すべての $t \geq 0$ に対して $\phi_p(t) \geq \phi_q(t)$ であることを示した。どちらの関数も $[0, \infty)$ 上で連続であるから、$x > 0$ に対してこの不等式を $[0, x]$ 上で積分してよい：

$$\int_0^x \frac{t^p - 1}{p}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_0^x \frac{t^q - 1}{q}\,\mathrm{d}t.$$

ここで

$$\int_0^x \frac{t^p - 1}{p}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p}\Big(\frac{x^{p+1}}{p+1} - x\Big) = \frac{x}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1} - 1\Big),$$

であり、q についても同様である。よって

$$\frac{x}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1} - 1\Big) \;\geq\; \frac{x}{q}\Big(\frac{x^q}{q+1} - 1\Big),$$

であり、$x > 0$ で割ると（不等号の向きは変わらない）

$$\frac{1}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1} - 1\Big) \;\geq\; \frac{1}{q}\Big(\frac{x^q}{q+1} - 1\Big).$$

を得る。$x = 0$ のとき、これは $-\frac{1}{p} \geq -\frac{1}{q}$ となり、すでに見たとおり正しい。以上で、すべての $x \geq 0$ に対して証明が完了した。

検算

- $x = 1$ のとき、中間の不等式は $0 \geq 0$ となる。二つの曲線はそこで交わるので、等号が成り立つことと整合する。
- 最後の不等式で $p = 2$、$q = 1$、$x = 3$ とすると、左辺は $\frac{1}{2}(3 - 1) = 1$、右辺は $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ であり、$1 \geq \frac{1}{2}$ となる。
- $0 < q < p$ かつ $x \geq 0$ を満たす三つ組 (p, q, x) を 200,000 個無作為に選んで試したところ（$x = 0$、$x = 1$、ごく小さな x を含む）、どちらの不等式にも反例は見つからなかった。

よくある間違い

- $x < 1$ のときに $[1, x]$ 上で積分し、不等号の向きをそのままにしてしまう。不等式を積分する前に、積分の端点を小さい順に並べなければならない。
- 端点 $x = 0$ を忘れる。そこでは t^{q-1} が定義すらされないことがある。
- 直前に示した不等式を積分するのではなく、最後の部分を微分法を使って一から証明しようとする。

STEP のその先へ

$q \to 0$ のとき $(x^q - 1)/q \to \ln x$ であるから、この結果は、p が 0 に向かって減少するとき $(x^p - 1)/p$ が $\ln x$ に向かって減少することを示している。これは対数の上界を与えるきれいな関数族であり、統計学におけるボックス・コックス変換（Box–Cox transformation）の基礎でもある。積分が不等式を保つという原理（積分の単調性（monotonicity of the integral））は、解析学の講義でリーマン積分（Riemann integral）について最初に証明される定理の一つである。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。