解答例

STEP II 1997、第 7 問

純粋数学 ・ 曲線の概形

STEP II 1997、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s2-q7

鍵となる考え方

右辺は x に x^2 を通してのみ依存するので、$u = x^2$ の二次式（quadratic）とみて平方完成（completing the square）する。そうすれば微分を使わずに、y^2 のとりうる最大値が一行で求まる。概形については、方程式は $x \to -x$ としても $y \to -y$ としても変わらないので、第 1 象限（first quadrant）の様子さえわかれば、あとは折り返せばよい。押さえておくべき点は、曲線と座標軸の交点、原点における傾き、そして原点以外で曲線が x 軸と交わる点における傾きである。

解答

最大値と最小値

$a = 0$ のとき、方程式は $y^2 = -x^4$ となり、$x = y = 0$ でなければならない。つまり「曲線」はただ一点 $(0,0)$ であり、y のとる値は 0 のみである。以下では $a \neq 0$ とする。現れるのは a^2 だけなので、$a > 0$ として考え、最後に $|a|$ と書き直せばよい。

$y^2 \geq 0$ であるから、$x^2(a^2 - x^2) \geq 0$、すなわち $x = 0$ または $x^2 \leq a^2$ が必要である。よって曲線は帯状の領域 $-|a| \leq x \leq |a|$ に含まれる。x^2 について平方完成すると

$$y^2 = a^2x^2 - x^4 = \frac{a^4}{4} - \left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 \leq \frac{a^4}{4},$$

であり、等号が成り立つのは $x^2 = \frac{1}{2}a^2$ のときに限る。したがって曲線上のいたるところで $|y| \leq \frac{1}{2}a^2$ であり、$y = \frac{1}{2}a^2$ と $y = -\frac{1}{2}a^2$ はともに $x = \pm|a|/\sqrt{2}$ において実際にと

られる。ゆえに

$$\boxed{y_{\max} = \frac{a^2}{2}, \qquad y_{\min} = -\frac{a^2}{2}, \qquad \text{いずれも} x = \pm\frac{|a|}{\sqrt{2}}.}$$

考えてみよう これは微分による方法とどう整合するだろうか。$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ となるのはどこか。

陰関数微分（implicit differentiation）を行うと、$2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2a^2x - 4x^3 = 2x(a^2 - 2x^2)$ となる。$y \neq 0$ である点では、傾きが 0 となるのはちょうど $x^2 = \frac{1}{2}a^2$ のときであり（解 $x = 0$ では $y = 0$ となる）、これらは上で求めた 4 点にほかならない。$y = 0$ となる点では y で割ることができないので、別に扱う必要がある。それは次で扱う。二つの方法の結果は一致するが、平方完成を使えば、停留値（stationary value）が全体での最大値・最小値であることまで一度に証明できる。

曲線の形

$a > 0$ とする。y について解くと、二つの分枝

$$y = x\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{および} \qquad y = -x\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad -a \leq x \leq a,$$

が得られ、これらは互いに x 軸に関して対称である。第一の分枝では

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

- **原点では**傾きは a であり、もう一方の分枝では $-a$ である。したがって曲線は原点を 2 回通り、そこで自分自身と交差する。接線（tangent）は $y = \pm ax$ である。
- $x = \pm a$ **では** $y = 0$ であり、$x \to a^-$ のとき傾きは $-\infty$ に発散する。したがって曲線は $(\pm a, 0)$ で**鉛直な**接線をもって x 軸と交わる。そこでは曲線はなめらかで丸みを帯びており、尖ってはいない。
- **その間では**、第一の分枝は $(0,0)$ から増加して $x = a/\sqrt{2}$ で最大値 $\frac{1}{2}a^2$ をとり、再び減少して $(a,0)$ に戻る。残りの象限は両座標軸に関する対称性から得られる。

結果として、横に寝かせた 8 の字形が得られる。ループは $x \geq 0$ と $x \leq 0$ にそれぞれ一つずつあり、幅は $2|a|$、全体の高さは a^2 である。

曲線全体を一度に見渡すすっきりした方法は、$x = a\sin t$ とおくことである。すると $a^2 - x^2 = a^2\cos^2 t$ より $y^2 = a^4\sin^2 t\cos^2 t$ となり、曲線は

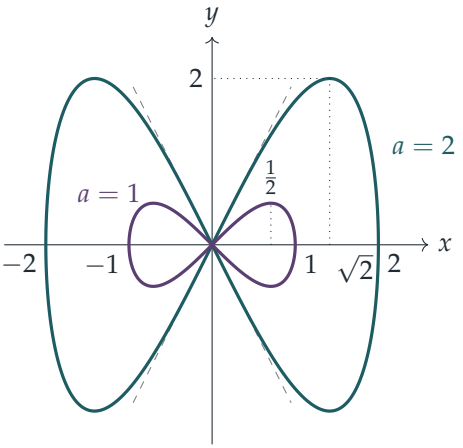
$$x = a\sin t, \qquad y = \tfrac{1}{2}a^2\sin 2t, \qquad 0 \leq t < 2\pi,$$

によって描かれる。ここからも $|y| \leq \frac{1}{2}a^2$ であることがわかる。

$a=1$ と $a=2$ の場合

	x 軸との交点	O における接線	極値をとる点
$a=1$	$x=0,\ \pm1$	$y=\pm x$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{2}\right)$
$a=2$	$x=0,\ \pm2$	$y=\pm2x$	$\left(\pm\sqrt{2},\pm2\right)$

二つの曲線の位置関係を調べる。$0<|x|\leq 1$ では $x^2(1-x^2)<x^2(4-x^2)$ であるから、$a=1$ の曲線は $a=2$ の曲線の真に内側にあり、共有点は原点のみである。たとえば $x=1$ では、$a=1$ の曲線は $y=0$ にあるのに対し、$a=2$ の曲線は $y=\pm\sqrt{3}$ にある。



破線は $a=2$ のときの接線 $y=\pm2x$ である。$a=1$ のときの原点における接線は $y=\pm x$ で、傾斜角は 45° である。

検算

- a を無作為に 50 通り選び、$|x|\leq|a|$ の範囲で格子探索を行ったところ、どの場合も $|y|$ の最大値は $\frac{1}{2}a^2$ であり、$|x|=|a|/\sqrt{2}\approx 0.7071|a|$ でとられた。$a=2$ では、$|x|\approx 1.41421$ において $y_{\max}=2.000000$ となる。
- 最大値は当然 a^2 に比例する。(x,y) を (ax,a^2y) で置き換えると、$a=1$ の曲線が一般の曲線に移るからである。つまり $a=2$ の曲線は、$a=1$ の曲線を横に 2 倍、縦に 4 倍に引き伸ばしたものであり、だからこそずっと背が高いのである。

よくある間違い

- $y=x\sqrt{a^2-x^2}$ だけを描いてしまう。方程式が定めているのは y^2 なので、y の正負両方がグラフに含まれ、S 字形ではなく二つのループになる。

- $(\pm a, 0)$ に尖った角を描いてしまう。そこでの傾きは無限大なので、曲線は x 軸を鉛直に、なめらかに横切る。
- 曲線が原点で傾き $\pm a$ をもって自分自身と交差することを忘れる。O の近くで二つの曲線を見分ける手がかりは、まさにこの傾きである。

STEP のその先へ

ここでの原点は**結節点**（node）、すなわち代数曲線（algebraic curve）が自分自身と交差する点である。O の近くでは方程式は $y^2 \approx a^2x^2$、つまり 2 直線 $y = \pm ax$ のように振る舞う。このように最低次の項によって特異点（singular point）を分類することは、代数曲線の研究の第一歩である。$x = a\sin t$ という工夫は、この曲線が三角関数で媒介変数表示（parametrisation）できることを示している。この種の曲線はリサージュ図形（Lissajous figures）と呼ばれる（ここでは振動数の比が $1:2$ である）。このような曲線の概形を描く練習、さらに広く STEP 流の考え方の練習には、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。