解答例

STEP II 1997、第 6 問

純粋数学 ・ 三角方程式

> **STEP II 1997、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q6

鍵となる考え方

すべてを $t = \tan\theta$ を用いて表す。三倍角の公式（triple-angle formula）によって方程式は t の三次方程式（cubic equation）になり、容易に見つかる根（root）を一つ見つけると、残る二次式はちょうど最初の小問に現れたものになる。したがって、その根は $\tan^{-1}(1 \pm \sqrt{2})$ を計算するのではなく、二倍角（double angle）に関する条件によって処理できる。余接（cotangent）を含む方程式は、同じ方程式が姿を変えたものにすぎない。置換（substitution）$\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$ によって cot が tan に入れ替わるのである。

解答

最初の結果

$t = \tan\phi$ が $t^2 = 2t + 1$ を満たすとする。このとき $1 - t^2 = -2t$ である。また、$t = 0$ は $t^2 = 2t + 1$ を満たさないので $t \neq 0$ であり、さらに $t^2 \neq 1$ である（そうでなければ $2t = 0$ となる）。よって $\tan 2\phi$ は定義され、

$$\tan 2\phi = \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{2t}{-2t} = -1,$$

となり、示すべきことが示された。

逆（converse）も成り立ち、これは後で必要になる。$\tan 2\phi = -1$ ならば $2t = -(1 - t^2)$、すなわち $t^2 = 2t + 1$ である。したがって

$$\tan^2\phi = 2\tan\phi + 1 \iff \tan 2\phi = -1.$$

方程式 $\tan\theta = 2 + \tan 3\theta$

解であるためには、$\tan\theta$ と $\tan 3\theta$ がともに定義されていなければならない。$t = \tan\theta$ とおく。すると

$$\tan 3\theta = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2},$$

であり、$\tan 3\theta$ が定義されているので $1 - 3t^2 \neq 0$ である。よって

$$\tan\theta - \tan 3\theta = \frac{t(1 - 3t^2) - (3t - t^3)}{1 - 3t^2} = \frac{-2t - 2t^3}{1 - 3t^2}.$$

これを 2 に等しいとおき、両辺に $1 - 3t^2$（0 でない）を掛けると

$$-t - t^3 = 1 - 3t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad t^3 - 3t^2 + t + 1 = 0.$$

係数の和が 0 であるから $t = 1$ は根であり、

$$t^3 - 3t^2 + t + 1 = (t - 1)(t^2 - 2t - 1).$$

$t = 1$ も $t = 1 \pm \sqrt{2}$ も $3t^2 = 1$ を満たさないので、どの根も実際に解を与える。

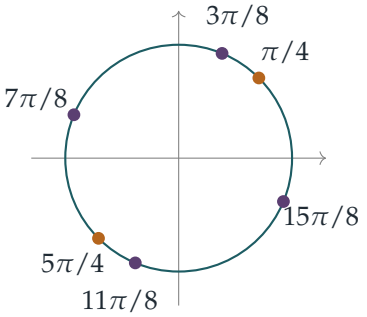
考えてみよう $\tan\theta = 1 \pm \sqrt{2}$ を、π の有理数倍の形にどう直せばよいか？

最初の小問を使う。$t^2 - 2t - 1 = 0$ の根は、$t^2 = 2t + 1$ を満たす $\tan\theta$ の値にほかならず、上の同値関係により、それらはちょうど $\tan 2\theta = -1$ を満たす θ に対応する。

- $\tan\theta = 1$：$\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$。$(0, 2\pi)$ においては $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ となる。
- $\tan 2\theta = -1$：$2\theta = \frac{3\pi}{4} + n\pi$ であるから、$\theta = \frac{3\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$。ここで 2θ は $(0, 4\pi)$ を動くので、$n = 0, 1, 2, 3$ であり、$\theta = \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$ となる。

（たとえば $\tan\frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$、$\tan\frac{7\pi}{8} = -\tan\frac{\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}$ である。）よって、$0 < \theta < 2\pi$ における解は

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}.$$



琥珀色の点は $\tan\theta = 1$ から、四分の一回転ずつ離れた紫色の点は $\tan 2\theta = -1$ から得られる。

方程式 $\cot\theta = 2 + \cot 3\theta$

考えてみよう cot について計算を一からやり直さなければならないのか？

その必要はない。$\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$ とおく。すると $\cot\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \tan\psi$ である。また、cot の周期（period）が π であることを用いると

$$\cot 3\theta = \cot\left(\frac{3\pi}{2} - 3\psi\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - 3\psi\right) = \tan 3\psi,$$

となる。各辺が定義されるのは、対応する tan が定義されるときであり、かつそのときに限る。したがって方程式は

$$\tan\psi = 2 + \tan 3\psi,$$

となり、これは先ほどの方程式である。範囲 $-\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ は $0 < \psi < 2\pi$ となり、これはちょうど先ほどの範囲である。よって ψ は上で求めた六つの値をとり、$\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$ より

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{8}, -\frac{11\pi}{8}.$$

検算

- $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき：$\tan 3\theta = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$ であり、$2 + (-1) = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$。$\theta = \frac{3\pi}{8}$ のとき：$\tan\frac{9\pi}{8} = \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ であり、$2 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2} = \tan\frac{3\pi}{8}$。
- t の三次方程式の根は高々三つであり、tan の周期は π であるから、長さ 2π の区間には高々 $3 \times 2 = 6$ 個の解があると予想される。実際に六つ見つかった。
- 数値的に、$\tan x - \tan 3x - 2$ を $(0, 2\pi)$ 上の細かい格子点で調べると、（極（pole）の近くを除いて）符号が変わるのは $x = \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{10\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$ だけである。余接の方程式についても同様に調べると、ちょうど上に挙げた六つの値が見つかる。

よくある間違い

- $\tan 2\theta = -1$ で $n = 0, 1$ だけを考えて終えてしまうこと。θ は $(0, 2\pi)$ を動くので 2θ は $(0, 4\pi)$ を動き、解は二つではなく四つになる。
- 確認せずに何かで割ってしまい根 $t = 1$ を失うこと、あるいは $\frac{5\pi}{4}$ を忘れること。
- 最後の小問を一から解き直して、範囲を誤ること。置換によって与えられた区間はちょうど $(0, 2\pi)$ に写されるのであり、これは偶然ではない。

STEP のその先へ

恒等式 $\tan 3\theta = (3t - t^3)/(1 - 3t^2)$ は $(1 + \mathrm{i}t)^3$ の実部と虚部から得られ、一般に $\tan n\theta$ は $(1 + \mathrm{i}t)^n$ から読み取れる、$\tan\theta$ の多項式の比である。これらの多項式の根は π の有理数倍の正接であり、だからこそその因数分解（factorisation）は、ここでの $t^2 - 2t - 1$ のように、きれいな形になるのである。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、倍角の公式が複素数の乗法の幾何からどのように自然に導かれるかを示している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。