解答例

STEP II 1997、第 5 問

純粋数学 ・ 複素指数関数による写像

> **STEP II 1997、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q5

この問題は、*Beyond STEP* の第 5.7 節「**写像としての複素指数関数**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/complex-exponential.html

鍵となる考え方

この関係式は、$z = \mathrm{e}^{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^{w}$ を絶対値（modulus）と偏角（argument）の形で書いたものにすぎない。u が z の絶対値を決め、v がその偏角を決めている。このことに気づけば、どの小問も極座標（polar coordinates）の問題になる。唯一の微妙な点は、偏角が 2π の整数倍の違いを除いてしか定まらないことである。そのためこの写像は多対一（many-to-one）である。一対一対応（one-to-one correspondence）を得るには、どの辺を含めるかに注意しながら、u–v 平面を適切な高さの水平な帯（strip）に制限しなければならない。

解答

$z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}$ のときの w を求める

$\mathrm{e}^{u} > 0$ かつ $|\cos v + \mathrm{i}\sin v| = 1$ であるから、関係式は次のことを意味する。

$$|z| = \mathrm{e}^{u}, \qquad \arg z = v \pmod{2\pi}.$$

$z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}$ のとき、$|z| = \mathrm{e}$ かつ $\arg z = \frac{\pi}{2}$ である。よって $\mathrm{e}^{u} = \mathrm{e}$ より $u = 1$ を得る（実数の指数関数は一対一である）。また $\cos v + \mathrm{i}\sin v = \mathrm{i}$ より $\cos v = 0$ かつ $\sin v = 1$ であり、$v = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ を得る。したがって

$$w = 1 + \mathrm{i}\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

このような w は無数に存在し、鉛直線 $u = 1$ 上に 2π 間隔で並んでいる。

直線 $u =$ 定数 の像

直線 $u = c$ 上では、点 z の絶対値は e^c、偏角は v である。v がすべての実数を動くと、$\cos v + \mathrm{i}\sin v$ は単位円上を（無限回）回るので、z は次の円を描く。

$$\text{円} x^2 + y^2 = \mathrm{e}^{2c}, \quad \text{中心} O,\ \text{半径} \mathrm{e}^c.$$

c が大きいほど円は大きくなり、$c = 0$ のときは単位円になる。$c \to -\infty$ のとき円は O に向かって縮むが、$\mathrm{e}^c > 0$ であるから決して O には達しない。

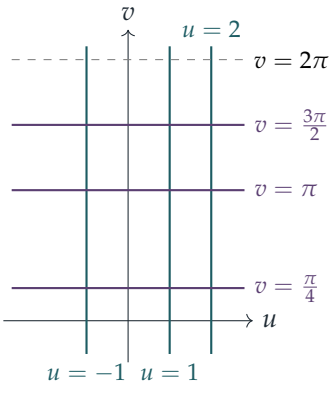
直線 $v =$ 定数 の像

直線 $v = c$ 上では $z = \mathrm{e}^u(\cos c + \mathrm{i}\sin c)$ であり、これは固定された単位ベクトル $(\cos c, \sin c)$ の正の定数倍である。u が $\mathbb{R}$ 全体を動くと、倍率 e^u は $(0, \infty)$ のすべての値をちょうど一度ずつとる。したがって像は次の半直線（half-line）である。

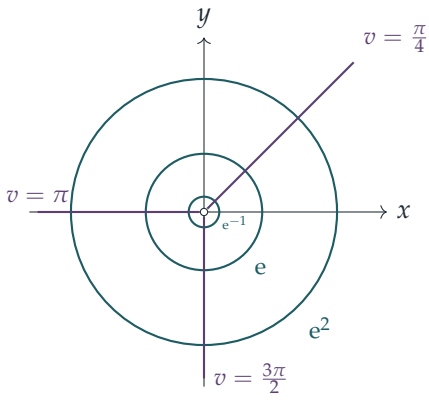
点O を端点とし、偏角c(正のx 軸から測る）をもつ半直線。ただしO 自身は除く。

直線 $v = c$ と $v = c + 2k\pi$ は同じ半直線を与える。たとえば直交座標で表すと、$v = \frac{\pi}{4}$ は $y = x$（ただし $x > 0$）を与え、$v = \pi$ は負の x 軸を与える。

図は u–v 平面の格子線とその像を示している。鉛直線は円に、水平線は半直線に移る。



u–v 平面



x–y 平面

（円の大きさは正確な縮尺ではない。半径 e^{-1}、e、e^2 は非常に速く大きくなるからである。白丸は、決して到達しない点 O を表す。）

第 1 象限と一対一に対応する部分集合

点 z が開いた第 1 象限にあるのは、$z \neq 0$ であって、0 と $\frac{\pi}{2}$ の間に（端点を含まずに）偏角をもつとき、かつそのときに限る。次のようにとる。

$$W_1 = \left\{(u,v) : u \in \mathbb{R},\ 0 < v < \tfrac{\pi}{2}\right\}, \qquad W_2 = \left\{(u,v) : u \in \mathbb{R},\ 2\pi < v < \tfrac{5\pi}{2}\right\}.$$

W_1 のすべての点は第 1 象限に移る。そこでは $e^u \cos v > 0$ かつ $e^u \sin v > 0$ だからである。逆に、第 1 象限の点 z が $z = e^u(\cos v + i \sin v)$ と表されるのは、$u = \ln|z|$ かつ $v = \theta + 2k\pi$ のときに限る。ここで $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ はその偏角の主値（principal argument）である。これらの値のうち $(0, \frac{\pi}{2})$ に入るのはちょうど一つ、$k = 0$ のものだけであるから、z は W_1 にちょうど一つの原像（preimage）をもつ。よって W_1 は象限と一対一に対応する。W_2 についても $k = 1$ として同じ議論が成り立つ。W_2 は W_1 を 2π だけ上に平行移動したものである。

（どの帯 $\{2k\pi < v < 2k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ をとっても同様にうまくいく。）

$0 < |z| < 1$ と一対一に対応する部分集合

今度は $|z| = e^u < 1$、すなわち $u < 0$ が必要である。さらにすべての偏角がちょうど一度ずつとられなければならないので、v はちょうど長さ 2π の区間を動く必要がある。

> **考えてみよう** 帯は上の辺を含むべきか、下の辺を含むべきか。それとも両方を含むべきか、どちらも含まないべきか。

ちょうど一方である。両方を含めて、たとえば $0 \le v \le 2\pi$ とすると、$(u, 0)$ と $(u, 2\pi)$ はどちらも正の実軸上の同じ点 e^u に移るので、対応は一対一にならない。どちらも含めなければ、正の実軸にはまったく到達しない。一方の辺だけを含めれば、すべての偏角がちょうど一度ずつ現れる。そこで次のようにとる。

$$W_3 = \{(u,v) : u < 0,\ 0 \le v < 2\pi\}, \qquad W_4 = \{(u,v) : u < 0,\ -\pi < v \le \pi\}.$$

W_3 について：$0 < |z| < 1$ ならば $u = \ln|z| < 0$ でなければならない。また z の偏角 $\theta + 2k\pi$ のうち $[0, 2\pi)$ に入るものはちょうど一つである。この区間は長さが 2π で、端点を一方しか含まないからである。よってそのような z はそれぞれ W_3 にちょうど一つの原像をもち、W_3 の各点は $0 < e^u < 1$ を満たす z に移る。W_4 については、偏角の主値に対応する区間 $(-\pi, \pi]$ を用いれば同じ議論が成り立つ。どちらも、半平面 $u < 0$ を高さ 2π の半開の帯に制限したものである。

検算

- $u = 1$、$v = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ とおくと $z = \mathrm{e}(\cos\frac{5\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{2}) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}$ となり、確かに求めるとおりである。
- 数値的にも、数千組のランダムな (u, v) に対して、$|z| = \mathrm{e}^u$ と $\arg z \equiv v$ が誤差 10^{-9} 以内で成り立つことを確かめた。各目標集合のランダムな点に対して、$W_1, \ldots, W_4$ のそれぞれにちょうど一つの原像が見つかった。また点 $(-1, 0)$ と $(-1, 2\pi)$ はどちらも $z = \mathrm{e}^{-1} \approx 0.3679$ を与える。これにより、閉じた帯では二重に数えてしまうことが確認できる。

よくある間違い

- $w = 1 + \frac{\pi}{2}\mathrm{i}$ だけを答え、$+2k\pi$ を忘れる。
- 像に原点を含めてしまう。e^u は決して 0 にならないので、円が一点に縮むことはなく、半直線の始点は除かれた点である。
- W_3 として閉じた帯 $0 \le v \le 2\pi$（あるいは開いた帯 $0 < v < 2\pi$）を用いる。前者は正の実軸を二重に数え、後者は正の実軸を取りこぼす。

STEP のその先へ

ここでの写像は複素指数関数（complex exponential）$w \mapsto \mathrm{e}^w$ である。これは直交座標の格子線を極座標の格子線に移し、周期 $2\pi\mathrm{i}$ をもつ周期関数である。この写像が一対一となる帯を選ぶことは、まさにその逆関数である**複素対数関数の分枝**（branch of the complex logarithm）を選ぶことにほかならない。除いた辺が**分枝切断**（branch cut）であり、これによって $\log z$ を $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 全体で連続に定義できない理由がわかる。Tristan Needham の *Visual Complex Analysis*（図で見る複素解析の入門書）には、この写像や等角写像（conformal map）一般の美しい図が数多く載っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。