解答例

STEP II 1997、第 3 問

純粋数学 ・ 部分分数分解による積分

> **STEP II 1997、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q3

鍵となる考え方

分母にある 2 つの 2 次式を掛け合わせると x^4+4 になる。これは典型的な「姿を変えた平方の差（difference of two squares）」であり、$x^4+4=(x^2+2)^2-(2x)^2$ と書ける。部分分数（partial fractions）に分解できてしまえば、各項は標準的な積分である。それぞれの分子を、分母の導関数の定数倍と定数とに分ける。前者を積分すると対数（logarithm）になり、後者は平方完成（completing the square）を行うと逆正接（arctangent）になる。

解答

部分分数分解

まず

$$(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=(x^2+2)^2-(2x)^2=x^4+4x^2+4-4x^2=x^4+4.$$

であることに注意する。したがって、求める恒等式の両辺に x^4+4 を掛けると、

$$(ax+b)(x^2-2x+2)+(cx+d)(x^2+2x+2)=1 \quad \text{すべての} x.$$

が成り立てばよい。左辺を展開すると

$$(a+c)x^3+(b-2a+d+2c)x^2+(2a-2b+2c+2d)x+(2b+2d).$$

となる。定数多項式1と係数を比較すると、

$$\begin{aligned} x^3: &\quad a+c=0,\\ x^2: &\quad b+d-2a+2c=0,\\ x^1: &\quad 2(a+c)+2(d-b)=0,\\ x^0: &\quad 2(b+d)=1. \end{aligned}$$

第1式と第3式から $c=-a$、$d=b$ を得る。すると第4式から $b=d=\frac{1}{4}$ である。最後に第2式は $\frac{1}{2}-4a=0$ となるので、$a=\frac{1}{8}$ である。よって

$$a=\tfrac{1}{8}, \qquad b=\tfrac{1}{4}, \qquad c=-\tfrac{1}{8}, \qquad d=\tfrac{1}{4},$$

すなわち

$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{8}\left(\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\frac{2-x}{x^2-2x+2}\right).$$

である。（$c=-a$ と $d=b$ は計算をしなくても予想できた。x を $-x$ に置き換えても $\frac{1}{x^4+4}$ は変わらず、2つの分母が入れ替わるだけだからである。）

積分

考えてみよう $\dfrac{x+2}{x^2+2x+2}$ はどのように積分すればよいだろうか？

分母の導関数は $2x+2$ である。そこで分子を、$2x+2$ の定数倍と残りの部分との和として表す：

$$x+2=\tfrac{1}{2}(2x+2)+1, \qquad 2-x=-\tfrac{1}{2}(2x-2)+1.$$

平方完成すると $x^2\pm 2x+2=(x\pm 1)^2+1$ である。したがって

$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{16}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{16}\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x-1)^2+1}.$$

となる。どちらの2次式もすべての実数 x に対して正であるから、各項は $[0,1]$ 上で連続である。最初の2項は $f>0$ として f'/f の形をしており、積分すると $\ln f$ になる。残りの2項は積分すると逆正接になる。よって

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4+4} &= \frac{1}{16}\Big[\ln(x^2+2x+2)-\ln(x^2-2x+2)\Big]_0^1+\frac{1}{8}\Big[\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)\Big]_0^1\\ &= \frac{1}{16}[(\ln 5-\ln 1)-(\ln 2-\ln 2)]\\ &\quad +\frac{1}{8}[(\tan^{-1}2+\tan^{-1}0)-(\tan^{-1}1+\tan^{-1}(-1))]\\ &= \frac{1}{16}\ln 5+\frac{1}{8}[\tan^{-1}2-(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\pi}{4})]\\ &= \frac{1}{16}\ln 5+\frac{1}{8}\tan^{-1}2, \end{aligned}$$

となり、題意が示された。$\ln 2$ の項どうし、$\frac{\pi}{4}$ の項どうしがそれぞれ打ち消し合う。これは先ほど気づいた対称性から生じる、見ていて気持ちのよい帰結である。

検算

- $x=0$ のとき、部分分数分解の式は $\frac{1}{8}\left(\frac{2}{2}+\frac{2}{2}\right)=\frac{1}{4}=\frac{1}{0+4}$ を与える。$x=1$ のときは $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{5}$ となり、これも正しい。
- 被積分関数は $[0,1]$ 上で $\frac{1}{4}$ から $\frac{1}{5}$ まで減少するので、積分の値は 0.2 と 0.25 の間になければならない。数値的には $\frac{1}{16}\ln 5+\frac{1}{8}\tan^{-1}2\approx 0.100589+0.138394=0.238983$ である。この積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると 0.2389834593 となり、有効数字約 16 桁まで一致する。

よくある間違い

- 実数の範囲で x^4+4 を因数分解しようとして、実数解を探してしまう。実数解は存在しないので、因数は 2 次式でなければならない。$4x^2$ を足して引き、平方完成するのがコツである。
- 逆正接の項で下端の値を忘れてしまう。$\tan^{-1}(0+1)=\frac{\pi}{4}$ と $\tan^{-1}(0-1)=-\frac{\pi}{4}$ は、両方を含めて初めて打ち消し合う。

STEP のその先へ

因数分解 $x^4+4=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$ は、ソフィー・ジェルマン（Sophie Germain）の恒等式 $a^4+4b^4=(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$ の特別な場合である。この恒等式から、たとえば n^4+4 が素数（prime）となるのは $n=1$ のときに限ることがわかる。より一般に、複素数解は共役（conjugate）な対として現れるので、実数係数の多項式はすべて実数係数の 1 次式と 2 次式の積に因数分解できる。したがって、部分分数分解、ひいては対数と逆正接があれば、どんな有理関数（rational function）も積分できる。周回積分（contour integration）を用いれば、$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+4}=\frac{\pi}{4}$ はほとんど計算せずに求められる。その理由は Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）に説明されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。