解答例

STEP II 1997、第 2 問

純粋数学 • 漸化式

> **STEP II 1997、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q2

鍵となる考え方

この等式の連鎖は、実は姿を変えた漸化式（recurrence）である。連鎖の各段は $x_n + 2/x_{n+1} = 3$ を表しているので、各項が次の項を決める。最初のいくつかの項を分数として計算し、分子と分母をよく観察しよう。すぐに 2 の累乗が現れる。そして予想が立てば、帰納法（induction）に必要なステップはまさに漸化式から得られる。

解答

規則性を見つける

連鎖を等式ごとに読むと

$$\frac{2}{x_1} = 3 \qquad \text{かつ} \qquad x_n + \frac{2}{x_{n+1}} = 3 \quad (n \geq 1),$$

となるので、

$$x_1 = \frac{2}{3}, \qquad x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n}.$$

である（この漸化式が意味をもつのは $x_n \neq 3$ のときに限られるが、すべての x_n が 0 と 1 の間にあることを後で示す）。最初のいくつかの項を計算すると、

$$x_1 = \frac{2}{3}, \qquad x_2 = \frac{2}{3 - \frac{2}{3}} = \frac{6}{7}, \qquad x_3 = \frac{2}{3 - \frac{6}{7}} = \frac{14}{15}, \qquad x_4 = \frac{2}{3 - \frac{14}{15}} = \frac{30}{31}.$$

分母 $3, 7, 15, 31$ はいずれも 2 の累乗より 1 小さい数、すなわち $2^{n+1} - 1$ であり、各分子はその分母より 1 小さい。そこで次のように予想する。

$$x_n = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1}.$$

数学的帰納法による証明

$P(n)$ を命題「$x_n = \dfrac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$」とする。

基底段階。$n=1$ のとき、公式は $\frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3} = x_1$ を与えるので、$P(1)$ は真である。

帰納段階。ある $k \geq 1$ について $P(k)$ が真であると仮定する。計算を見やすくするため $N = 2^{k+1}$ とおくと、$x_k = \dfrac{N-2}{N-1}$ である。このとき

$$3 - x_k = \frac{3(N-1)-(N-2)}{N-1} = \frac{2N-1}{N-1},$$

であり、これは 0 ではない（実際、$x_k < 1$ より 2 より大きい）。よってこれで割ることができ、

$$x_{k+1} = \frac{2}{3-x_k} = \frac{2(N-1)}{2N-1} = \frac{2N-2}{2N-1}.$$

考えてみよう なぜこれが $n = k+1$ のときの公式なのか？

$2N = 2^{k+2} = 2^{(k+1)+1}$ だからである。したがって

$$x_{k+1} = \frac{2^{(k+1)+1}-2}{2^{(k+1)+1}-1},$$

となり、これはまさに $P(k+1)$ である。

$P(1)$ が真であり、すべての $k \geq 1$ について $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ が成り立つので、数学的帰納法により、すべての $n \geq 1$ について $P(n)$ は真である。これにより、すべての n について $0 < x_n < 1$ であることも確かめられ、分母 $3 - x_n$ が 0 になることは決してない。

「別解」の道筋：線形化

この予想は導くこともできる。$x_{n+1} = 2/(3-x_n)$ という形の漸化式は、0 でない項からなる新たな数列 (a_n) を用いて $x_n = 2a_n/a_{n+1}$ とおくと、線形になる。代入すると

$$\frac{2a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{2}{3-\frac{2a_n}{a_{n+1}}} = \frac{2a_{n+1}}{3a_{n+1}-2a_n}, \qquad \text{よって} \qquad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n.$$

特性方程式（auxiliary equation）$t^2 - 3t + 2 = 0$ の解は 1 と 2 であるから、$a_n = A + B \cdot 2^n$ である。$a_1 = 1$（a の定数倍は自由に選べる）、$a_2 = 3$（$x_1 = 2a_1/a_2 = \frac{2}{3}$ となるように）とすると $a_n = 2^n - 1$ となり、$x_n = \dfrac{2(2^n-1)}{2^{n+1}-1}$ という同じ公式が得られる。

検算

- 公式に $n = 0$ を代入すると $x_0 = 0$ となる。実際、最初の等式 $3 = 2/x_1$ は、一般の段 $x_0 + 2/x_1 = 3$ において $x_0 = 0$ としたものである。これはうまく整合している。
- $n \to \infty$ のとき $x_n \to 1$ である。漸化式の極限 L は $L = 2/(3 - L)$、すなわち $L^2 - 3L + 2 = 0$ を満たさなければならないので、$L = 1$ または $L = 2$ であり、この数列が下から近づくのは 1 である。
- $x_1 = \frac{2}{3}$ から始めて $x_{n+1} = 2/(3 - x_n)$ を正確な分数で反復計算すると、40 までのすべての n で公式と一致した。たとえば $x_5 = \frac{62}{63}$ である。

よくある間違い

- 連鎖の読み違い：等式は $x_n + 2/x_{n+1} = 3$ であって、$x_{n+1} + 2/x_n = 3$ ではない。これを間違えると別の数列になってしまう。
- 「この規則性が続く」で止めてしまうこと。問題は証明を求めており、いくつかの項は証拠にすぎない。
- 帰納段階で $2 \cdot 2^{k+1}$ を $2^{(k+1)+1}$ と書き直すのを忘れ、結論が命題 $P(k+1)$ であることが目に見える形にならないこと。

STEP のその先へ

$x_{n+1} = (ax_n + b)/(cx_n + d)$ という形の漸化式はメビウス変換（Möbius transformation）の反復であり、「別解」の道筋のように常に線形化できる。同じことだが、2×2 行列（matrix）$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の累乗を追うこともでき、その固有値（eigenvalue、ここでは 1 と 2）が長期的な振る舞いを支配する。不動点（fixed point）1 と 2 はそれぞれ吸引的、反発的であり、これが数列が 1 に落ち着く理由である。行列の観点については Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を、数列の収束一般については Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の理解）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。