解答例

STEP II 1997、第 14 問

確率・統計 ・ ポアソン過程

> **STEP II 1997、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q14

鍵となる考え方

力学の設定になってはいるが、これはポアソン過程（Poisson process）の問題である。運動学（kinematics）が教えてくれるのは、どの車両を数えればよいかということだけである。速い車両がトンネル内で私に追いつくのは、私が入ってから一定の時間以内にその車両が入った場合に限る。その境目の時刻がわかれば、あとはすべてポアソン分布に従う個数の問題になる。後半では、車両がランダムに「速い」「遅い」とラベル付けされたポアソン流は、互いに独立（independent）な 2 つのポアソン流に分かれるという事実を用いる。また、遅い車両が 1 台あると、その後ろにいるすべての速い車両から私が守られることにも気づく必要がある。

解答

以下では車両を質点（particle）とみなし（車両の長さは無視する）、追いついた車両はそれ以降、前の車両の速さでそのまま走るものとする。時刻 t は私がトンネルに入った瞬間から秒単位で測る。車両は毎分 6 台、すなわち毎秒 0.1 台の割合で入ってくるので、長さ τ 秒の任意の区間に入る台数は $\mathrm{Po}(0.1\tau)$ に従い、互いに交わらない区間における台数は独立である。

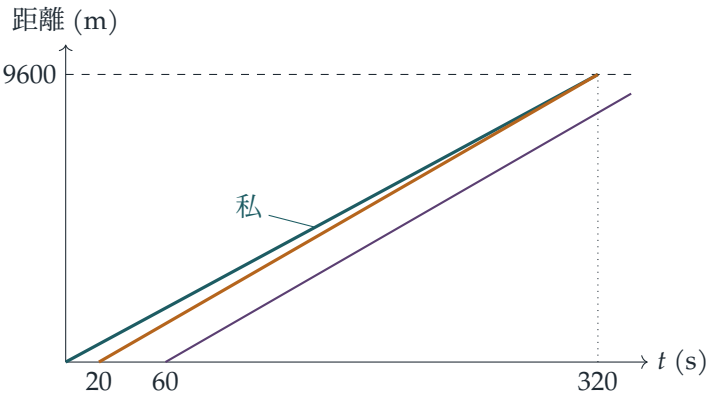
前半：誰が私に追いつけるか

私はトンネルを通り抜けるのに $9600/30 = 320\,\mathrm{s}$ かかる。時刻 $t > 0$ に入る速さ $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ の車両を考える。それが私に追いつくまでは、時刻 s における私の進んだ距離は $30s$、その車両の進んだ距離は $32(s-t)$ である。これらが等しくなるのは $2s = 32t$、すなわち $s = 16t$ のときであり、そのときの位置はトンネルの入口から $480t$ メートル

である。したがって、私がトンネルを出る前にその車両が追いつくための必要十分条件は

$$480t \leq 9600 \iff t \leq 20.$$

である。（同値な言い方をすれば、その車両は通り抜けるのに $9600/32 = 300\,\mathrm{s}$ かかるので、私より遅れずに出口に着くのは $t + 300 \leq 320$ のとき、かつそのときに限る。）



この距離と時間のグラフには、私（ティール）、$t = 20$ に入る速い車両（アンバー）、$t = 60$ に入る速い車両（プラム）が示されている。アンバーの車両は、ちょうど 2 台とも出口に着いたところで私に追いつく。プラムの車両のように、それより後に入る速い車両は、私がトンネルを出るときにはまだ私の後ろにいる。

他の車両はすべて $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で走るので、$(0, 20]$ に入った車両が私に追いつく前に何かに足止めされることはない。私以外でその車両の前にいる車両も、私に追いつくまではやはり $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で走っているからである。私より前に入った車両は私の前方にいるので、関係ない。したがって、私がトンネルを出るときに私の後ろにできている列は、ちょうど $(0, 20]$ に入った車両からなり、その台数は $\mathrm{Po}(0.1 \times 20) = \mathrm{Po}(2)$ に従う。私の後ろの列に並ぶ車両の台数の期待値（expected value）は

$$\boxed{2}.$$

である。

中盤：ちょうど 2 台が入ってきて私に追いつく

今度は、他の各車両は確率 $\frac{1}{2}$ で速い（$32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$）か遅い（$30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$）かのいずれかであり、これは他のすべてのことと独立であるとする。

考えてみよう 20 秒以内に入った速い車両は、すべて依然として私に追いつくだろうか？

そうではない。時刻 $t' > 0$ に入った遅い車両は、私の後ろ $30t'$ メートルの一定の間隔を保ち続けるので、私に追いつくことはない。それより後に入った速い車両は、その遅い車両に追いつく（あるいはその後ろにいる何かに阻まれる）と、それ以降は $30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で走ることになるので、やはり私には届かない。したがって、$(0,20]$ に入った車両が私に追いつくのは、その車両が速く、**かつ**私とその車両の間に入ったすべての車両が速いとき、かつそのときに限る。$t = 20$ より後に入った速い車両は、たとえ行く手を阻むものが何もなくても私に追いつけない。

$(0,20]$ に入る車両の台数を $K \sim \mathrm{Po}(2)$ とする。この小問の事象は、この時間帯にちょうど 2 台の車両が入り、その 2 台がともに私に追いつくというものである。そのためには $K = 2$ で、しかも 2 台とも速い必要がある：

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}(K=2) \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{2^2 \mathrm{e}^{-2}}{2!} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}} \approx 0.0677.$$

終盤：ちょうど 2 台が私の後ろに並ぶ

今度は、最初の 20 秒間に何台の車両が入ってもよい。$(0,20]$ に入る K 台の車両を、入った順に並べる。上の議論により、出口で私の後ろにできている列は、この並びの先頭から途切れずに続く速い車両の連なりである。（$t = 20$ より後に入った車両は決して私に追いつけないので、列に加わることはない。）したがって、列にちょうど 2 台の車両が並ぶのは、次のいずれかのとき、かつそのときに限る。

- $K = 2$ で、2 台とも速い：$K = 2$ という条件のもとでの確率は $\frac{1}{4}$。
- $K \geq 3$ で、最初の 2 台が速く、3 台目が遅い：$K = k \geq 3$ という条件のもとでの確率は $\frac{1}{8}$。

よって

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{2 台の列}) &= \tfrac{1}{4}\,\mathrm{P}(K=2) + \tfrac{1}{8}\,\mathrm{P}(K \geq 3) \\
&= \tfrac{1}{4} \cdot 2\mathrm{e}^{-2} + \tfrac{1}{8}\left(1 - \mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-2}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{5}{8}\mathrm{e}^{-2} \\
&= \boxed{\tfrac{1}{8}\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right)} \approx 0.108.
\end{aligned}$$

これは前の答えより大きいが、そうでなければならない。前の事象は、2 台の列ができる場合の一つだからである。

> うまい別解がある。車両の流れを速い車両と遅い車両に分けると、それぞれ割合 $0.05\,\mathrm{s^{-1}}$ の独立な 2 つのポアソン過程になる。ちょうど 2 台の列ができるということは、最初の 20 秒間において、最初の 2 つの到着が速い車両で、その次

の到着（もしあれば）が遅い車両であるということである。ラベル付きの事象を扱うポアソン過程の問題では、このように 2 つの流れで考えるのが最短の道筋であることが多い。

検算

- 極限の場合（limiting case）：すべての車両が遅ければ誰も私に追いつけない。実際、速い確率が 0 のとき、列についての式は 0 を与える。
- 速い確率を $\frac{1}{2}$ の代わりに p とすると、同じ議論により $p^2\mathrm{P}(K=2)+p^2(1-p)\mathrm{P}(K\geq 3)$ が得られる。$p=1$ のときこれは $\mathrm{P}(K=2)=2\mathrm{e}^{-2}$ となり、列の長さがちょうど $\mathrm{Po}(2)$ に従う前半の結果と一致する。
- 追い越しのない交通を 4×10^5 回シミュレーションした。その結果、前半の列の長さの平均は 2.003、後半の確率は 0.0674 と 0.1076 であり、厳密値 0.0677 と 0.1081 によく合っていた。

よくある間違い

- 遅い車両が 1 台あると、その後ろにいるすべての速い車両から私が守られることを忘れて、終盤の答えを $\mathrm{P}(\text{exactly two fast in 20 s})=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$ としてしまう。
- 毎分 6 台という割合を秒単位の時間と組み合わせてしまう。20 秒間の平均は 2 であって、120 ではない。
- どの時刻に入った車両も列に加わると考えてしまう。私に届くのは最初の 20 秒以内に入った車両だけである。

STEP のその先へ

後半では**間引き**（thinning）を用いている。割合 λ のポアソン過程の各事象を、独立に確率 p で残すとき、残された事象と捨てられた事象は、それぞれ割合 $p\lambda$ と $(1-p)\lambda$ の独立なポアソン過程をなす。追い越しのできない車両の列は、交通流理論（traffic flow theory）における古典的なモデルであり、そこでは遅い車両が、ここで見たような「車群」（platoon）を生み出す。ポアソン過程と間引きについては、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。