解答例

# STEP II 1997、第 13 問

確率・統計 ・ ビュフォンの針

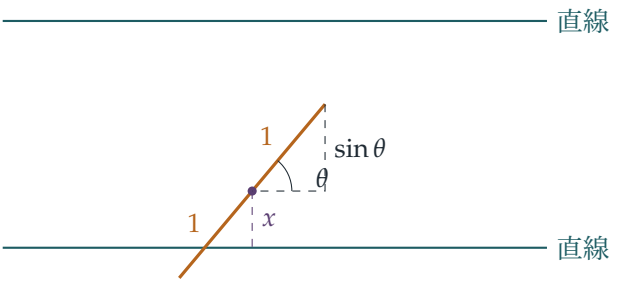
> **STEP II 1997、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q13

## 鍵となる考え方

これはビュフォン（Buffon）の針（Buffon's needle）の問題である。針の位置を、2 つの独立（independent）な確率変数で表す。すなわち、針の中心から最も近い直線までの距離と、針が直線となす鋭角である。中心を固定すると、すべては針が直線に垂直な方向にどこまで届くかで決まり、それは針の長さの半分にその角の正弦を掛けたものである。こうして各小問は、一様分布（uniform distribution）に従う角についての問題になる。

## 解答

「無作為に落とす」を通常の方法でモデル化する。中心から最も近い直線までの距離 $X$ は $[0,1]$ 上の一様分布に従い（直線の間隔は 2 cm なので、最も近い直線は高々 1 cm の距離にある）、針と直線のなす鋭角 $\theta$ は $X$ と独立に $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上の一様分布に従うとする。（角を $[0,\pi)$ 上の一様分布としても同じ答えが得られる。どちらの場合も $\sin\theta$ の分布は同じだからである。）



針の半分ずつの長さは 1 であるから、両端は中心から上下にそれぞれ垂直距離 $\sin\theta$ のところにある。

**小問 (i)**

中心が最も近い直線から距離 $x$ にあるとき、針がその直線と交わるのは、一方の端がその直線を越えるとき、すなわち

$$\sin\theta > x \iff \theta > \arcsin x,$$

のときであり、かつそのときに限る。ここで sin が $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で増加であることを用いた。$\theta$ は $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上の一様分布に従うので、

$$\mathrm{P}(\text{最も近い直線と交わる} \mid X = x) = \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin x = \frac{2}{\pi}\arccos x.$$

**小問 (ii)**

針が最も近い直線と交わる、すなわち $\theta > \arcsin x$ であるとする。針に沿って測ると、交点は中心から距離 $x/\sin\theta$ のところにある（$\theta$ の対辺が $x$ である直角三角形の斜辺）。したがって 2 つの部分の長さは $1 + x/\sin\theta$ と $1 - x/\sin\theta$ であり、短い方は

$$S = 1 - \frac{x}{\sin\theta}.$$

である。$\theta$ が $\arcsin x$ から $\frac{\pi}{2}$ まで動くとき、$S$ は 0 から $1 - x$ まで増加するので、$S$ は $[0, 1 - x]$ の値をとる。

交わるという条件で条件付け（conditioning）すると、$\theta$ は長さ $\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x$ の区間 $(\arcsin x, \frac{\pi}{2}]$ 上の一様分布に従う。$0 \le s \le 1 - x$ に対して

$$S \le s \iff \frac{x}{\sin\theta} \ge 1 - s \iff \sin\theta \le \frac{x}{1-s} \iff \theta \le \arcsin\frac{x}{1-s},$$

である。ここで $1 - s > 0$ と $x/(1-s) \le 1$（$s \le 1 - x$ より）を用いたので、逆正弦は意味をもつ。よって、短い方の線分の累積分布関数（cumulative distribution function）は

$$F(s) = \mathrm{P}(S \le s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ \dfrac{\arcsin\left(\frac{x}{1-s}\right) - \arcsin x}{\arccos x}, & 0 \le s \le 1 - x, \\ 1, & s > 1 - x. \end{cases}$$

である。確認として、中央の式は $s = 0$ で 0 を与え、$s = 1 - x$ で $(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)/\arccos x = 1$ を与えるので、$F$ は連続である。

**考えてみよう** 針が直線と交わると知らされた後でも、なぜ $\theta$ は一様分布に従うのか。

一様分布に従う変数を、部分区間に入るという条件で条件付けすると、その部分区間上の一様分布になる。実際、$\arcsin x \le a \le \frac{\pi}{2}$ に対して $\mathrm{P}(\theta \le a \mid \theta > \arcsin x) = (a - \arcsin x)/(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)$ であり、これは $a$ について 1 次である。まさにこれを用いたのである。

### 小問 (iii)

最も近い直線は距離 $X \le 1$ にあり、他のすべての直線は距離 $2 - X \ge 1$ 以上のところにある。針は中心から高々 $\sin\theta \le 1$ までしか届かないので、最も近い直線以外の直線と交わりうるのは、ちょうど $X = 1$ かつ $\theta = \frac{\pi}{2}$ のときに限られ、その確率は 0 である。したがって、針がすべての直線と交わらないのは、最も近い直線と交わらないときであり、かつそのときに限る。小問 (i) より

$$\mathrm{P}(\text{交わらない} \mid X = x) = \frac{2}{\pi}\arcsin x.$$

$X$ は $[0,1]$ 上の一様分布（密度（density）1）に従うので、$x$ について平均をとると

$$\mathrm{P}(\text{交わらない}) = \int_0^1 \frac{2}{\pi}\arcsin x \,\mathrm{d}x.$$

$u = \arcsin x$、$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行うと

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arcsin x \,\mathrm{d}x &= \Big[x\arcsin x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} - \Big[-\sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$

したがって

$$\mathrm{P}(\text{針がすべての直線と交わらない}) = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2} - 1\Big) = 1 - \frac{2}{\pi} \approx 0.363.$$

## 検算

- 小問 (i) の結果は両端で妥当な振る舞いをする。$x = 0$ では中心が直線上にあり、確率は 1 である。$x \to 1$ では垂直な針しか届かず、確率は 0 に近づく。
- 交わる確率は $2/\pi \approx 0.637$ であり、これはビュフォンの古典的な答え $2\ell/(\pi d)$ で $\ell = d = 2$ としたものである。
- $10^6$ 回の無作為な落下のシミュレーションでは、交わらない割合は 0.3626 となり、$1 - 2/\pi = 0.3634$ と比較できる。$x = 0.2, 0.5, 0.7$ に対する $F(s)$ のシミュレーション値は、公式と約 0.002 の精度で一致した。

## よくある間違い

- 小問 (ii) で条件付けを忘れること。$\arccos x$ ではなく $\frac{\pi}{2}$ で割ると、決して 1 に達しない「分布関数」が得られてしまう。
- 短い方の線分を $1 - x\sin\theta$ や $1 - x/\cos\theta$ としてしまうこと。三角形のどの辺が $x$ で、どの角が $\theta$ かを確認すること。
- 小問 (iii) で $\frac{1}{2}$ を掛けたり、交わる条件を調整せずに $X$ を $[0,2]$ 上の一様分布としたりすること。最も近い直線までの距離は $[0,1]$ 上の一様分布に従う。

## STEP のその先へ

ビュフォンの針（1777 年）は幾何学的確率（geometric probability）の最初期の問題の一つであり、$\pi$ が現れることから、針を落とすことで $\pi$ の（収束の遅い）モンテカルロ法（Monte Carlo）による推定が得られる。最も簡潔な現代的扱いは期待値の線形性（linearity of expectation）を用いるものである。交わる回数の期待値は針の長さに比例し、これは曲がった針（「ビュフォンのヌードル」（Buffon's noodle））に対しても成り立つ。この考え方は積分幾何学（integral geometry）とクロフトンの公式（Crofton formula）へとつながる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、同時分布（joint distribution）やこの種の幾何学的確率の問題が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。