解答例

STEP II 1997、第 12 問

確率・統計 ・ 二項分布と偶奇の確率

> **STEP II 1997、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q12

鍵となる考え方

伝言が現時点で**正しい**か**誤っている**かだけを追跡すればよい。聞き間違いが起こるたびに正誤が反転するので、アルバートのもとに戻ってくる伝言が正しいのは、ささやきのうち偶数回が聞き間違えられたとき、かつそのときに限る。二項展開（binomial expansion）の偶数番目の項だけを取り出すのが $(a+b)^n + (a-b)^n$ の役割である。奇数番目の項が打ち消し合うからである。変更後のゲームについては、一度失敗すると、アルバートは**誤った**伝言を伝えることに注意する。したがってそれ以降、各ラウンドでは**奇数**回の聞き間違いが必要になる。

解答

3 人の場合

n 人のプレイヤーがいるとき、ささやきは n 回ある。アルバートからバーサへ、バーサから次のプレイヤーへ、と輪を回ってゼベディーまで進み、最後にゼベディーからアルバートへ戻る。各ささやきは確率 p で正しく聞き取られ、それぞれ独立（independent）である。アルバートが真実を聞くかどうかは、聞き間違えられたささやきの回数だけで決まり、硬貨の出た面にはよらない。

3 人の場合、ささやきは 3 回あり、それぞれ確率 $\frac{2}{3}$ で正しく伝わる。アルバートに届く伝言が正しいのは、どのささやきも誤らない場合か、ちょうど 2 回誤る場合（2 回目の誤りが 1 回目を打ち消す）である。よって

$$\Pr(\text{勝ち}) = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\left(\tfrac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} + \frac{6}{27} = \frac{14}{27}.$$

n 人の場合

$q = 1 - p$ とおく。聞き間違えられたささやきの回数は二項分布（binomial distribution）$\mathrm{B}(n, q)$ に従い、その回数が偶数のときにゲームは勝ちとなる：

$$P = \sum_{k\text{ は偶数}} \binom{n}{k} q^k p^{n-k}.$$

ここで

$$(p+q)^n + (p-q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k (1 + (-1)^k) = 2 \sum_{k\text{ は偶数}} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k,$$

である。k が奇数の項は打ち消し合い、k が偶数の項は 2 回現れるからである。$p + q = 1$ かつ $p - q = 2p - 1$ であるから、

$$\boxed{P = \tfrac{1}{2}(1 + (2p-1)^n).}$$

$n = 3$、$p = \frac{2}{3}$ のとき、これは $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{27}) = \frac{14}{27}$ となり、前半の結果と一致する。

変更後のゲーム

アルバートがバーサにささやく回数を N とする。伝言が輪をちょうど一周することを**ラウンド**と呼ぶことにする。したがって、どのラウンドもアルバートのささやきから始まる。

> **考えてみよう** 失敗したラウンドの後、次のラウンドは最初のラウンドを単に繰り返したものだろうか？

そうではない。最初のラウンドでは、アルバートは正しい結果を伝える。ゼベディーからの伝言を聞き間違えた場合、アルバートは自分が**聞いた**内容、すなわち誤った内容を伝える。誤った伝言から始まる場合、ラウンドの終わりにアルバートが真実を聞くのは、**奇数**回のささやきが誤ったとき、かつそのときに限る。その確率は $1 - P$ である。そのラウンドも失敗すれば、アルバートは再び誤った伝言を聞き（そしてそれを伝え）るので、それ以降のラウンドはすべてこのラウンドと同じ状況になる。各ラウンドは独立である。聞き取りが独立だからである。

したがって、最初のラウンドは確率 P で成功し、それ以降の各ラウンドは確率 $1 - P$ で成功し、確率 P で失敗する。よって $\Pr(N = 1) = P$ であり、$k \geq 2$ に対して

$$\Pr(N = k) = \underbrace{(1-P)}_{\text{第 1 ラウンドは失敗}} \underbrace{P^{k-2}}_{\text{ラウンド 2,…,}k-1\text{ は失敗}} \underbrace{(1-P)}_{\text{第 }k\text{ ラウンドで勝ち}} = (1-P)^2 P^{k-2}.$$

$0 < p < 1$ と仮定すると、$0 < P < 1$ である。このとき、与えられた和の公式を $x = P$

として用いると

$$\sum_{k=2}^{\infty} kP^{k-2} = \frac{1}{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} kP^{k-1} - 1\right) = \frac{1}{P}\left(\frac{1}{(1-P)^2} - 1\right),$$

となり、したがって

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(N) &= P + (1-P)^2 \cdot \frac{1}{P}\left(\frac{1}{(1-P)^2} - 1\right) \\ &= P + \frac{1-(1-P)^2}{P} \\ &= P + (2-P) = 2. \end{aligned}$$

アルバートがバーサにささやく回数の期待値（expected value）は、プレイヤーの人数や p の値にかかわらず 2 である。

これをもっと手早く確かめる方法がある。最初のラウンドが失敗したという条件のもとで、その後のラウンド数は成功確率 $1-P$ の幾何分布（geometric distribution）に従うので、その平均は $1/(1-P)$ である。よって $\mathrm{E}(N) = 1 + (1-P)\cdot\frac{1}{1-P} = 2$ となる。

（端の場合について：$p = 1$ の場合、または $p = 0$ かつ n が偶数の場合は $P = 1$ であり、アルバートは 1 回だけささやく。$p = 0$ かつ n が奇数の場合は $P = 0$ であり、2 回目のラウンドは確実に成功するので $N = 2$ である。）

検算

- 正しい聞き取りと誤った聞き取りの 2^n 通りのパターンをすべて書き出し、厳密な分数で計算すると、$n \leq 8$ およびいくつかの p の値について $\frac{1}{2}(1+(2p-1)^n)$ が再現される。3 人の場合の $\Pr(\text{勝ち}) = \frac{14}{27}$ もその一つである。
- $p = \frac{1}{2}$ とすると $P = \frac{1}{2}$ となる。伝言は完全なノイズであり、当然そうなるべきである。
- $(n, p) = (3, \frac{2}{3})$、$(5, 0.9)$、$(4, 0.3)$ について変更後のゲームを 2×10^5 回シミュレーションしたところ、ささやきの回数の平均はそれぞれ 2.001、1.996、1.994 であった。

よくある間違い

- ささやきの回数を n ではなく $n-1$ と数えてしまう。ゼベディーからアルバートへ戻る最後のささやきも数に入る。
- 変更後のゲームの各ラウンドが確率 P で勝ちになるとみなしてしまう。そうすると $1/P$ が得られるが、これは誤りである。失敗の後、アルバートは誤った伝言を伝えるからである。

STEP のその先へ

伝言の正誤の状態は 2 状態のマルコフ（Markov）連鎖（Markov chain）であり、$2p-1$ はその遷移行列（transition matrix）の第 2 固有値（eigenvalue）である。$(2p-1)^n$ が、伝言が硬貨の結果をどれだけ速く忘れていくかを支配するのはこのためである。同じモデルは二元対称通信路（binary symmetric channel）と呼ばれ、情報理論（information theory）と誤り訂正符号（error-correcting codes）の出発点となっている。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、母関数（generating functions）とマルコフ連鎖をこのレベルで扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。