解答例

STEP II 1997、第 11 問

力学 ・ 放物運動

STEP II 1997、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

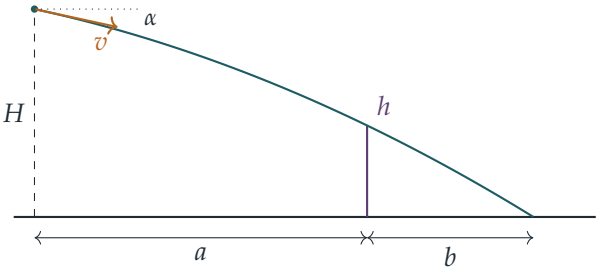
step.maths.org/questions/97-s2-q11

鍵となる考え方

軌道（trajectory）を、水平方向に進んだ距離を用いて、サーバーの打点の高さからどれだけ下がったかを表す方程式として書き下す。すると、与えられた二つの事実（ボールが a 進んだときに高さ h にあり、$a+b$ 進んだときに高さ 0 にある）は、二つの未知数 v と α についての二つの方程式となる。範囲の条件は、これらの方程式の解が実際に物理的な意味をもつのはいつかを問うことから得られる。

解答

ボールを、重力のみを受けて運動する質点（particle）としてモデル化する（空気抵抗（air resistance）や回転は考えない）。ボールを打つ点の真下の地面を原点とし、x をネットに向かう水平方向、y を鉛直上向きにとる。



v^2 の式

初速度は $(v\cos\alpha, -v\sin\alpha)$ である。時刻 t の後、

$$x = vt\cos\alpha, \qquad y = H - vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = x/(v\cos\alpha)$ を代入して消去し、$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ を用いると、

$$y = H - x\tan\alpha - \frac{gx^2(1+\tan^2\alpha)}{2v^2}. \tag{$*$}$$

$T = \tan\alpha$ および $k = \dfrac{g(1+T^2)}{2v^2}$ とおくと便利であり、このとき $y = H - xT - kx^2$ となる。

ボールは $x = a + b$ で着地するので、そこで $y = 0$ とおくと、

$$0 = H - (a+b)T - k(a+b)^2 \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{H-(a+b)T}{(a+b)^2}. \tag{1}$$

k をその定義で置き換え、v^2 について整理すると

$$v^2 = \frac{g(a+b)^2(1+\tan^2\alpha)}{2[H-(a+b)\tan\alpha]},$$

となり、これが一つ目の結果である。

$\tan\alpha$ の式

ボールはネットをぎりぎりで越えるので、$x = a$ で $y = h$ である。$(*)$ より、

$$H - h = aT + ka^2.$$

(1) の k を代入し、両辺に $(a+b)^2$ を掛けると、

$$\begin{aligned}(H-h)(a+b)^2 &= aT(a+b)^2 + a^2\big[H-(a+b)T\big]\\ &= aT(a+b)\big[(a+b)-a\big] + a^2H\\ &= abT(a+b) + a^2H.\end{aligned}$$

H の項をまとめ、$(a+b)^2 - a^2 = b(2a+b)$ を用いると、

$$ab(a+b)T = b(2a+b)H - (a+b)^2h.$$

正の量 $ab(a+b)$ で割ると、

$$\tan\alpha = \frac{2a+b}{a(a+b)}\,H - \frac{a+b}{ab}\,h,$$

となり、示すべき式が得られた。

H の範囲

a、b、h、H が与えられると、二つ目の式によって $\tan\alpha$ が定まり、続いて一つ目の式によって v^2 が定まる。このようなサーブが存在するのは、これらの値が許容されるとき、すなわち $\tan\alpha > 0$（ボールは**下向き**に打たれるので $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$）かつ $v^2 > 0$ のとき、そしてそのときに限る。

考えてみよう v^2 の分子は明らかに正である。では、$v^2 > 0$ は実際には何を要求しているのだろうか？

それは分母が正であること、すなわち $H - (a+b)\tan\alpha > 0$ を要求している。$\tan\alpha$ の式を代入すると、

$$\begin{aligned} H - (a+b)\tan\alpha &= H - \frac{2a+b}{a}H + \frac{(a+b)^2}{ab}h \\ &= -\frac{a+b}{a}H + \frac{(a+b)^2}{ab}h = \frac{a+b}{a}\left[\frac{(a+b)h}{b} - H\right]. \end{aligned}$$

$(a+b)/a > 0$ であるから、これが正となるのは次のとき、かつそのときに限る。

$$H < \frac{(a+b)h}{b}.$$

$\tan\alpha > 0$ のためには

$$\frac{2a+b}{a(a+b)}H > \frac{a+b}{ab}h \quad \Longleftrightarrow \quad H > \frac{(a+b)^2 h}{b(2a+b)},$$

が必要である（正の量 $a(a+b)/(2a+b)$ を掛けた）。

二つの条件を合わせると

$$\boxed{\frac{(a+b)^2}{b(2a+b)}h \;<\; H \;<\; \frac{a+b}{b}h}$$

が得られ、逆にこの範囲にある任意の H に対して、条件を満たす α と v が存在する。$\dfrac{a+b}{2a+b} < 1$ であるから、この区間は空ではない。

どちらの範囲の端にも明確な意味がある。上限は、着地点からネットの上端を通る直線が、サーバーのいる鉛直線と交わる高さである。重力によって軌道は下向きに曲がるので、ボールはその直線より下から出発しなければならない（$H = (a+b)h/b$ では無限大の速さが必要になる）。下限は $\alpha = 0$、すなわち水平なサーブの場合である。これより低い位置からサーブすると、ネットを越えたうえで指定された点に着地するには、ボールを上向きに打たなければならなくなる。

検算

- $a = 12\,\mathrm{m}$、$b = 6\,\mathrm{m}$、$h = 1\,\mathrm{m}$ のとき、範囲は $1.8\,\mathrm{m} < H < 3\,\mathrm{m}$ となる。$H = 1.8$ のとき、式から $\tan\alpha = \frac{30}{216}(1.8) - \frac{18}{72} = 0$ が得られ、下限に対して予想どおりの結果となる。
- 範囲内で a、b、h、H を無作為にとり、二つの式から α と v を計算して運動を数値的に追跡したところ、ボールは毎回ネットの上端を通過し、$x = a + b$ に着地した（厳密な軌道に対する相対誤差は 10^{-14} 未満）。
- 次元（dimensions）：$\tan\alpha$ の各項は長さを長さで割ったものであり、v^2 は $g\times$ 長さの次元をもつ。これは当然そうあるべきである。

よくある間違い

- 下向きの角度による符号の誤り：鉛直方向の初速度は $-v\sin\alpha$ であり、$(*)$ における $x\tan\alpha$ の項は引かれる。
- 「$v^2 > 0$」で止まってしまい、それが分母についての条件であって、$\tan\alpha$ を代入して初めて H についての条件になることに気づかない。

STEP のその先へ

ここでは、打ち出しの条件から軌道を決めるのではなく、逆に二つの境界条件（ネットと着地点）が打ち出しの条件を決定している。これは単純な**境界値問題**（*boundary-value problem*）であり、微分方程式を数値的に解くための「シューティング法（shooting method）」の背後にある考え方でもある。空気抵抗や回転を考慮すると、方程式はもはや閉じた形の解（closed-form solution）をもたず、まさにこの方法で解き進めることになる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、抵抗を受ける放物運動をはじめ、さらに多くの内容が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。