解答例

STEP II 1997、第 10 問

力学 ・ 爆発と弾性衝突

> **STEP II 1997、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q10

鍵となる考え方

すべての速度（velocity）を、軸（axis）に沿った成分と軸を横切る成分とに分解する。円筒はなめらか（smooth）なので、半径方向にしか押すことができない。したがって円筒は軸方向の速度をまったく変えず、弾性的な跳ね返り（elastic bounce）は横方向の速度を単に逆向きにするだけである。すると爆発における運動量保存（conservation of momentum）により、2 つの破片は 1 本の直径に沿って互いに離れるように飛ぶことになる。こうして問題全体は 2 枚の壁の間の 1 次元の運動に帰着し、軸方向の運動はそれにただ付き従うだけとなる。

解答

設定

破片は小さいので質点としてモデル化し、円筒はなめらかで固定されているものとし、指示どおり重力は無視する。円筒の軸に沿って z 軸をとり、爆発は時刻 $t = 0$ に原点で起こるものとする。

爆発の直後、質量 qM の破片の速度を、軸方向成分 w_1 と横方向成分 $\mathbf{u}_1$（軸に垂直）の和として表し、質量 $(1-q)M$ の破片についても同様に w_2、$\mathbf{u}_2$ と表す。爆発の間には外力がはたらかないので、運動量は保存される：

$$qMw_1 + (1-q)Mw_2 = Mv, \qquad qM\mathbf{u}_1 + (1-q)M\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}.$$

第 2 式は、横方向の速度が互いに逆向きであることを示している。したがって 2 つの破片は、同じ直径に沿って逆向きに軸から離れていく。この直径の方向を x 方向とし、破片 1（質量 qM）は速さ u_1 で $x = +L$ に向かい、破片 2 は速さ u_2 で $x = -L$ に向か

うとする。ここで

$$qu_1 = (1-q)u_2. \tag{1}$$

$q \le \frac{1}{2}$ であるから $u_1 \ge u_2$ である。つまり軽いほうの破片が速い。

各破片は壁に正面から当たる（半径に沿って動いている）ので、なめらかな壁が与える力積（impulse）はその半径の方向を向く。これにより横方向の速度は逆向きになり（跳ね返りは完全弾性的である）、軸方向の速度は変わらない。したがって各破片は同じ直径に沿って動き続け、その軸方向の速度は終始一定である。

$q = \frac{3}{8}$ であることの証明

軸方向の運動。軸方向の位置は $z_1 = w_1 t$、$z_2 = w_2 t$ である。破片はある時刻 $t > 0$ に出会うので $w_1 = w_2$ であり、すると運動量の式から $w_1 = w_2 = v$ が得られる。両方の破片は、もとの物体があったはずの位置と歩調をそろえて進む。

横方向の運動。破片 1 は $t = L/u_1$ に $x = L$ に達し、それから戻ってくるので、跳ね返った後は

$$x_1 = L - u_1\left(t - \frac{L}{u_1}\right) = 2L - u_1 t.$$

同様に、跳ね返った後の破片 2 の位置は $x_2 = -2L + u_2 t$ である。両方が跳ね返った後に衝突するので、$x_1 = x_2$ より

$$t = \frac{4L}{u_1 + u_2}, \qquad x = 2L - \frac{4Lu_1}{u_1 + u_2} = 2L\,\frac{u_2 - u_1}{u_1 + u_2}.$$

(1) より $u_2 = \frac{q}{1-q}u_1$ であるから、$u_1 + u_2 = \frac{u_1}{1-q}$、$u_2 - u_1 = \frac{(2q-1)u_1}{1-q}$ となる。よって衝突点は

$$x = 2L(2q-1).$$

$|x| = \frac{1}{2}L$ が必要なので $2q - 1 = \pm\frac{1}{4}$ であり、$q = \frac{5}{8}$ または $q = \frac{3}{8}$ を得る。$q \le \frac{1}{2}$ であるから

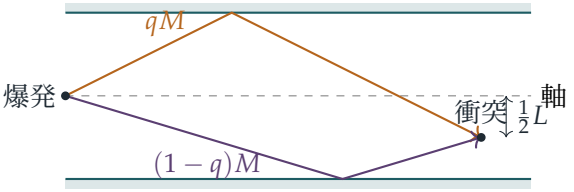
$$q = \frac{3}{8},$$

となり、求める結果が得られた。衝突は $x = -\frac{1}{2}L$、すなわち軸に対して重いほうの破片の側で起こる。

考えてみよう これは本当に、それぞれがちょうど 1 回ずつ跳ね返った後の、最初の出会いだろうか？

$q = \frac{3}{8}$ のとき、(1) より $u_2 = \frac{3}{5}u_1$ である。破片 1 は $t = L/u_1$ に、破片 2 は $t = \frac{5}{3}L/u_1$ に跳ね返り、衝突時刻は $4L/(u_1 + u_2) = \frac{5}{2}L/u_1$ で、どちらよりも後である。もっと早く出会うことはありうるだろうか？破片 1 が跳ね返る前は両者は離れていく一方であり、戻る途中の破片 1 が破片 2 に追いつくのは $t = 2L/(u_1 - u_2) = 5L/u_1$ のときだけ

で、これは破片 2 が向きを変えたずっと後である。したがって求めた出会いが最初のものであり、各破片はちょうど 1 回ずつ跳ね返っている。



図は、軸と共通の直径を含む平面を示している（軸方向は紙面の左右方向）。$q = \frac{3}{8}$ と、以下で求める速さに基づいて正確な縮尺で描いてある。

与えられたエネルギー

衝突時刻は

$$t = \frac{4L}{u_1 + u_2} = \frac{4L(1-q)}{u_1} = \frac{5L}{2u_1}.$$

これを $5L/v$ に等しいとおくと $u_1 = \frac{1}{2}v$ となり、したがって $u_2 = \frac{3}{5}u_1 = \frac{3}{10}v$ である。

軸方向の速度は v のまま変わらないので、爆発で得られた運動エネルギー（kinetic energy）はすべて横方向の運動エネルギーである：

$$\begin{aligned}\Delta E &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{8}M(\tfrac{1}{2}v)^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{8}M(\tfrac{3}{10}v)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}Mv^2\left(\tfrac{3}{32} + \tfrac{9}{160}\right) = \tfrac{1}{2}Mv^2\cdot\tfrac{3}{20} = \frac{3Mv^2}{40}.\end{aligned}$$

合体後の速度

衝突の直前、各破片の横方向の速度は跳ね返りによって逆向きになっている。破片 1 の横方向の運動量は $-qMu_1$、破片 2 は $+(1-q)Mu_2$ である。(1) より、これらの和は零である。軸方向の運動量は $qMv + (1-q)Mv = Mv$ である。合体（coalescence）において運動量は保存されるので、合体した質量 M の物体の速度は

$$v\text{(軸の方向)},$$

となり、もとの物体と同じである。ただし、軸から距離 $\frac{1}{2}L$ だけ離れた、軸に平行な直線上を進む。爆発で生じたエネルギー $\frac{3}{40}Mv^2$ は、合体においてすべて失われる。

検算

- $q = \frac{1}{2}$ のとき $x = 0$ となる。等しい破片は互いに鏡像であり、軸上で出会わなければならないので、これは当然である。

- $L = v = 1$ とすると $u_1 = 0.5$、$u_2 = 0.3$ である。$t = 5$ のとき、破片 1 は $2 - 0.5 \times 5 = -0.5$、破片 2 は $-2 + 0.3 \times 5 = -0.5$ にある。$x = \pm 1$ で反射させる時間刻みのシミュレーションでも、それぞれ 1 回ずつ跳ね返った後に $t = 5.000$、$x = -0.500$ で出会うことが再現された。
- 最終的な横方向の運動量は $-\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{10} = 0$ であるから、最終的な速度は純粋に軸方向である。

よくある間違い

- 壁が軸方向の速度を変えてしまうとすること。なめらかな壁がおよぼすのは垂直（半径方向）の力だけである。
- 跳ね返りによって横方向の運動量が逆向きになることを忘れること。横方向の運動量の総和が零に戻るのは、**両方の**破片が跳ね返った後だけである。
- $q = \frac{5}{8}$ を残してしまうこと。これは破片のラベルを入れ替えただけの同じ配置であり、$q \leq \frac{1}{2}$ により除外される。

STEP のその先へ

運動を対称性の方向に沿った成分とそれを横切る成分とに分けることは、ある大きな考え方の出発点である。すなわち、系の対称性は保存量（conserved quantity）を生み出す、という考え方である。この問題では円筒がその長さ方向のどこでも同じに見えるので、壁が存在しても軸方向の運動量は保存される（ネーター（Noether）の定理がこのことを厳密に述べる）。また、この問題は、爆発とそれに続く完全非弾性衝突（perfectly inelastic collision）によって、軸方向の運動はそのまま続きながら、エネルギーが熱として返されうることも示している。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、運動量と重心（centre of mass）の運動をこのような流儀で展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。