解答例

STEP II 1997、第 1 問

純粋数学 ・ 数字和と数え上げ

> **STEP II 1997、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q1

鍵となる考え方

数を書き並べるのではなく、まず個数を数え、それから各位（place value）の寄与を別々に足し合わせればよい。下 3 桁のそれぞれの位には、使ってよい数字がどれも同じ回数ずつ現れるので、和はほとんど自動的に求まる。さらによいことに、対称性（symmetry）がある。各数字 d を $7-d$ に置き換えると $0 \leftrightarrow 7$ と $2 \leftrightarrow 5$ が入れ替わるので、数は和が一定の組に分かれ、素因数分解（factorisation）もそのまま得られる。

解答

どの数が条件を満たすか

1000 と 6000 の間にある条件を満たす数は 4 桁であり、千の位の数字は $0, 2, 5, 7$ のいずれかでなければならない。0 にはなりえず（4 桁未満になってしまう）、7 にもなりえない（7000 を超えてしまう）。よって千の位は 2 または 5 であり、このように作られる 2000 から 5777 までの数はすべて範囲内にある。端点の 1000 と 6000 自体は数字 1 と 6 を含むので、「間」が端点を含むかどうかは問題にならない。

残りの 3 桁はそれぞれ、使ってよい 4 つの数字のどれでもよく、互いに独立に選べる。よって数の個数は

$$2 \times 4 \times 4 \times 4 = 128$$

である。

位ごとに足す

千の位。 128 個の数のうち半分の 64 個は 2 で始まり、残りの 64 個は 5 で始まる。千の位の数字の寄与は

$$64 \times (2+5) \times 1000 = 448\,000.$$

である。

百の位、十の位、一の位。これらの位のうち 1 つを固定する。その位にどの数字が入っても残りの数字の選び方は同じ数だけあるので、4 つの数字はそれぞれ、その位にちょうど $128/4 = 32$ 個の数において現れる。したがって、その位の数字の合計は $32 \times (0+2+5+7) = 32 \times 14 = 448$ である。3 つの位の重みは 100、10、1 であるから、合わせた寄与は

$$448 \times (100+10+1) = 448 \times 111 = 49\,728.$$

である。

これらを足すと、求める和は

$$S = 448 \times 1000 + 448 \times 111 = 448 \times 1111 = 497\,728.$$

である。

素数の積として表す

$448 = 64 \times 7 = 2^6 \times 7$ であり、$1111 = 11 \times 101$ である。ここで 101 は素数（prime）である（2、3、5、7 のいずれでも割り切れず、$11^2 > 101$ である）。ゆえに

$$S = 2^6 \times 7 \times 11 \times 101.$$

である。

> **考えてみよう** 位ごとの集計をまったくせずに答えを見抜く方法はあるだろうか？

ある。n が条件を満たすならば、$7777 - n$ も条件を満たす。7777 から各桁ごとに引くと繰り下がりは起こらず、各数字 d は $7-d$ に移る。この対応は $\{0,2,5,7\}$ をそれ自身に移し、先頭の数字 2 と 5 を入れ替える。よって 128 個の数は和が 7777 になる 64 組に分かれる（7777 は奇数なので、自分自身と組になる数はない）。したがって

$$S = 64 \times 7777 = 2^6 \times 7 \times 1111 = 2^6 \times 7 \times 11 \times 101,$$

となり、上の計算と一致する。

検算

1000 から 6000 までを短いコンピュータプログラムで探索すると、条件を満たす数はちょうど 128 個で、その和は 497 728 である。また $2^6 \times 7 \times 11 \times 101 = 64 \times 7777 = 497\,728$ である。大きさの妥当性を確かめると、条件を満たす数の平均は $7777/2 = 3888.5$ であり、範囲 2000 から 5777 のほぼ真ん中にある。

よくある間違い

- 先頭の数字に 7 を許してしまう（6000 を超える数が出てくる）、あるいは 0 が先頭に来られないことを忘れる。
- 千の位にも各数字が 128/4 回ずつ現れるとしてしまう。そこに現れるのは 2 と 5 だけで、それぞれ 64 回である。
- 1111 を 11×101 に分解せず、497 728 や 448×1111 で止めてしまう。

STEP のその先へ

各位に各数字が何回現れるかを数えることは、**二重計数**（*double counting*）の議論の最も簡単な例である。これは同じ量を 2 通りの順序で、ここでは数ごとと位ごとに足し合わせる方法である。$7777 - n$ による組分けは対称性の議論であり、同じ種類の議論からガウス（Gauss）の公式 $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ も得られる。数字が固定された集合から選ばれる数やその和は、初等整数論（elementary number theory）や組合せ論（combinatorics）の定番の題材である。ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、次に読む本として素晴らしい一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。