解答例

STEP I 1997、第 9 問

力学 ・ 相対速度

> **STEP I 1997、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q9

鍵となる考え方

道路脇から見るとすべてが動いているが、車から見るとすべてが静止している。車は長さ c の隙間を挟んで並ぶ固定されたブロックの列となり、ニワトリは**相対速度**（relative velocity）で一直線に道を横切る。ニワトリが無事に渡れるのは、幅 a の車線の中にいる間に、（車に対して）横方向にずれる距離が隙間 c 以下である場合に限る。この一つの条件から不等式が得られ、最小の速さは $c\sin\theta + a\cos\theta$ を最大化することで求まる。これは $R\cos(\theta - \alpha)$ の形に直す典型的な問題である。

解答

ニワトリを質点、車を速さ V で動く長方形とみなし、どの車も道路を横切る方向に幅 a の同じ帯状の領域を占めるとする。x 軸を道路に沿って車の進行方向にとり、y 軸を道路を横切る方向にとる。すると、ニワトリの速度は $(u\cos\theta, u\sin\theta)$（ただし $0 < \theta < \pi$）である。問題になるのは車が通る帯状の領域だけである。道路のそれ以外の部分では、ニワトリが危険にさらされることはない。

不等式

車に対するニワトリの相対速度は

$$\mathbf{w} = (u\cos\theta - V,\ u\sin\theta).$$

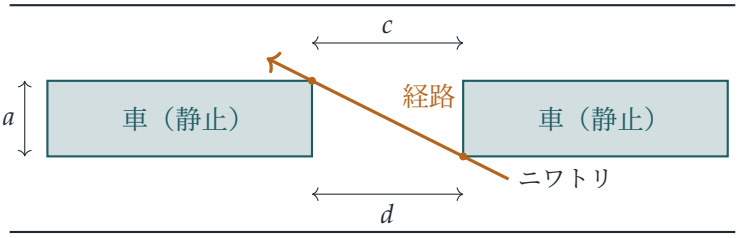
である。車の座標系では車は静止しており、ニワトリは一定の速度 $\mathbf{w}$ で一直線に進む。幅 a の帯を横切るのにかかる時間は

$$\tau = \frac{a}{u\sin\theta}$$

であり、その間にニワトリは（車に対して、車の流れと逆向きに）

$$d = (V - u\cos\theta)\,\tau = \frac{a(V - u\cos\theta)}{u\sin\theta}.$$

だけ後ろへずれる。



図は極端な場合 $d = c$ を示しており、このとき経路はちょうど隙間の対角線に沿う。

考えてみよう なぜずれ d は c 以下でなければならないのか。

車の座標系では、帯を通過するニワトリの経路は道路方向に長さ $|d|$ の区間を占め、その区間のどの点も車線内のある高さで通過される。静止した車が空けているのは長さ c の隙間だけなので、この区間全体が一つの隙間に収まらなければならない。すなわち $|d| \le c$ である。（逆に $|d| \le c$ ならば、ニワトリは出発の時刻を調整して区間が隙間の中に収まるようにできるので、安全に渡れる。）

特に $d \le c$、すなわち

$$a(V - u\cos\theta) \le c\,u\sin\theta, \qquad \text{よって} \qquad Va \le u\,(c\sin\theta + a\cos\theta).$$

である。左辺は正なので、安全に渡れるならば必ず $c\sin\theta + a\cos\theta > 0$ であり、これで割ることができる。

$$u \ge \frac{Va}{c\sin\theta + a\cos\theta},$$

となり、求める不等式が得られた。（条件のもう半分 $d \ge -c$ は、速すぎるニワトリが隙間を追い越して前の車にぶつかることを防ぐものであり、以下の最小値には関係しない。）

最小の速さと横断にかかる時間

$c\sin\theta + a\cos\theta = \sqrt{a^2 + c^2}\,\cos(\theta - \alpha)$ と表す。ここで α は

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \qquad \tan\alpha = \frac{c}{a}.$$

を満たす鋭角である。したがって $c\sin\theta + a\cos\theta \le \sqrt{a^2 + c^2}$ であり、等号は $\theta = \alpha$ のときに限り成り立つ。よって、どの向きについても

$$u \ge \frac{Va}{c\sin\theta + a\cos\theta} \ge \frac{Va}{\sqrt{a^2 + c^2}},$$

であり、$\theta = \alpha$ かつ $u = Va/\sqrt{a^2+c^2}$ のとき両方の不等式で等号が成り立つ。この選び方は実際に安全である。このとき $d = c$ がちょうど成り立ち（図の、角から角への経路）、$-c \le d \le c$ も満たされる。よって、一定の速さとして可能な最小値は $Va/\sqrt{a^2+c^2}$ であり、そのときの角度は $\alpha = \arctan(c/a)$ である。

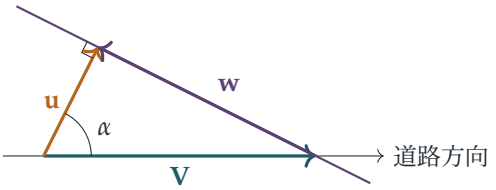
ニワトリは道路を横切る方向の速度成分 $u\sin\alpha$ で道幅 b 全体を横断するので、かかる時間は

$$\frac{b}{u\sin\alpha} = b\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{Va}\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c} = \frac{b\,(a^2+c^2)}{Vac} = \frac{b}{V}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right),$$

であり、これが求める結果である。

考えてみよう なぜ最小の速さのとき $\tan\theta = c/a$ となるのか。

速度に注目しよう。ニワトリの速度は $\mathbf{u} = \mathbf{V} + \mathbf{w}$ であり、最良の場合、相対速度 $\mathbf{w}$ は隙間の対角線の向き $(-c, a)$ を向く。したがって $\mathbf{u}$ の先端は、$\mathbf{V}$ の先端を通りこの向きをもつ直線上にあり、最も短い $\mathbf{u}$ は原点からこの直線に下ろした垂線である。その向き (a, c) は道路と角 $\arctan(c/a)$ をなし、その長さは $V\sin($対角線の角度$) = Va/\sqrt{a^2+c^2}$ である。



検算

- 単位：$Va/\sqrt{a^2+c^2}$ は速さであり、$\frac{b}{V}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$ は長さを速さで割ったもの、すなわち時間である。
- 極限：$\theta = \frac{\pi}{2}$（真横に横断）のとき、評価は $u \ge Va/c$ となる。つまりニワトリは、隙間が通り過ぎる時間 c/V のうちに幅 a を渡りきらなければならない。これは明らかに正しい。
- 数値：$a = 1, c = 2, V = 2, b = 5$ のとき、最小の速さは $\tan\theta = 2$ で $2/\sqrt{5} \approx 0.894$ であり、横断にかかる時間は $\frac{5}{2}\left(2+\frac{1}{2}\right) = 6.25$ である。道路の座標系で車とニワトリを直接シミュレーションしても結果は一致する。この速さの 1.01 倍では安全な出発時刻が見つかり、0.99 倍では一つも見つからない。

よくある間違い

- 安全の条件に、道路全体を横断する時間 $b/(u\sin\theta)$ を使ってしまう。問題になるのは幅 a の車線内にいる時間だけである。
- 相対速度の符号を間違える。車に対して、ニワトリは道路方向に $u\cos\theta + V$ ではなく $u\cos\theta - V$ で動く。

STEP のその先へ

障害物が静止して見える座標系に移ることはガリレイ変換（Galilean transformation）であり、問題が静的に見える座標系を選ぶことは力学で最も役に立つ習慣の一つである。また、最小化の部分は小さな最適化問題でもある。点から直線への最短のベクトルは垂線であり、これは線形代数（linear algebra）で直交射影（orthogonal projection）として再び出会うことになる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）には、この考え方に沿った相対運動の問題が数多く収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。