解答例

STEP I 1997、第 8 問

純粋数学 ・ 指数方程式の解

> **STEP I 1997、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q8

鍵となる考え方

$a^x > 0$ であるから、$x = a^x$ の根は正でなければならない。これにより対数（logarithm）をとることができ、問題は $x > 0$ における $f(x) = \ln x - x \ln a$ の零点（zero）に関する問題に帰着する。$a > 1$ のとき、この関数は増加したのち減少するので、零点をもつのは最大値（maximum）が 0 以上のときに限る。$0 < a < 1$ のときは狭義単調増加（strictly increasing）であるから、零点は高々 1 つであり、問題は実際に零点が存在するかどうかである。

解答

$f(x) = 0$ への帰着

以下つねに $a > 0$ とするので、$a^x = e^{x \ln a}$ はすべての実数 x に対して定義され、正である。$x \leq 0$ ならば $a^x > 0 \geq x$ であるから、$x \leq 0$ の範囲に根はない。$x > 0$ のときは両辺とも正であり、ln は狭義単調増加であるから、

$$x = a^x \iff \ln x = x \ln a \iff f(x) = 0, \qquad \text{ただし} f(x) = \ln x - x \ln a.$$

したがって、$x = a^x$ の実数解はちょうど $(0, \infty)$ における f の零点である。

$a > e^{1/e}$ のとき根をもたないこと

このとき $a > e^{1/e} > 1$ であるから $\ln a > 0$ である。微分すると

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \ln a,$$

となり、これは $0 < x < 1/\ln a$ で正、$x > 1/\ln a$ で負である。よって f は増加したのち減少し、$(0,\infty)$ における最大値は

$$f\left(\frac{1}{\ln a}\right) = \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right) - 1 = -\ln(\ln a) - 1.$$

である。ここで $a > e^{1/e}$ より $\ln a > 1/e$ であり、さらに対数をとると（両辺とも正なので）$\ln(\ln a) > \ln(1/e) = -1$ を得る。ゆえに

$$f(x) \le -\ln(\ln a) - 1 < 0 \quad \text{任意の} x > 0.$$

したがって f が 0 になることはなく、方程式 $x = a^x$ は実数解をもたない。これが示すべきことであった。

考えてみよう ちょうど $a = e^{1/e}$ のとき、また $1 < a < e^{1/e}$ のときはどうなるか。

$a = e^{1/e}$ のとき、最大値はちょうど 0 であり、それは $x = 1/\ln a = e$ でとられる。よって根は $x = e$ の 1 つ（重根（repeated root））であり、直線 $y = x$ は点 (e,e) で $y = a^x$ に接する（tangent）。$1 < a < e^{1/e}$ のときは最大値が正であり、両端で $f \to -\infty$ となるので、根は 2 つある。（$a = 1$ のときの根は $x = 1$ のみである。）問題ではこれらは問われていないが、$e^{1/e}$ がちょうど境目であることがわかる。

$0 < a < 1$ のとき根がちょうど 1 つであること

このとき $\ln a < 0$ であるから

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \ln a = \frac{1}{x} + |\ln a| > 0 \quad \text{任意の} x > 0,$$

となり、f は $(0,\infty)$ で狭義単調増加である。よって f の零点は**高々 1 つ**である。

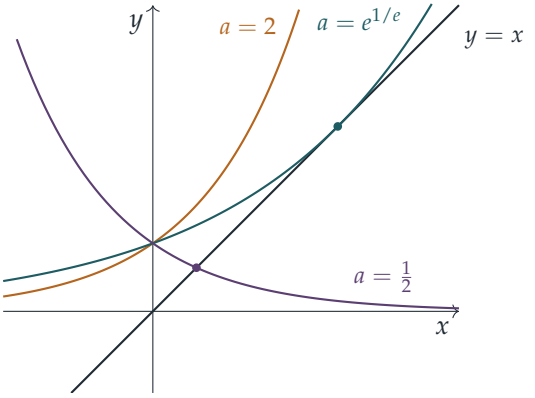
零点が実際に存在することを見るには、f が $(0,\infty)$ で連続（continuous）であり、

$$f(1) = -\ln a > 0, \qquad f(a) = \ln a - a\ln a = (1-a)\ln a < 0,$$

であることに注意すればよい（どちらも $0 < a < 1$ を用いている）。中間値の定理（intermediate value theorem）により、f は a と 1 の間に零点をもつ。

したがって $0 < a < 1$ のとき、方程式 $x = a^x$ は**ちょうど 1 つ**の実数解をもち、それは区間 $(a,1)$ にある。

図を見ればこのことは明らかである。$y = a^x$ は減少関数で正の値をとり、一方 $y = x$ は増加関数であるから、2 つのグラフはちょうど 1 回だけ交わる。（同じことであるが、$g(x) = a^x - x$ は狭義単調減少で、$g(0) = 1 > 0$ かつ $g(1) = a - 1 < 0$ である。）



検算

- 境界では $(e^{1/e})^e = e$ であるから、$a = e^{1/e} \approx 1.4447$ のとき $x = e$ は確かに根であり、接することと整合する。
- $a = \frac{1}{2}$ のとき、二分法（bisection）により唯一の根 $x \approx 0.6412$ が得られ、予想どおり $(\frac{1}{2}, 1)$ に含まれる。
- 数値的には、ランダムにとった 200 個の $a > e^{1/e}$ について、関数 $a^x - x$ は $[-20, 20]$ 上の細かい格子点で正のままであった。$\ln x - x \ln a$ の最大値は $-1 - \ln \ln a$ と一致した。a が $e^{1/e}$ をわずかに下回るときは根が 2 つあった。また、ランダムにとった 500 個の $a \in (0, 1)$ について、符号変化（sign change）はちょうど 1 回であった。

よくある間違い

- 根がすべて $x > 0$ を満たすことを先に確認せずに対数をとること。そうでなければ $\ln x$ は定義されないので、$x \leq 0$ の場合には別に（1 行で済む）議論が必要である。
- $0 < a < 1$ のとき f が増加することだけを示すこと。これで示せるのは根が**高々** 1 つであることであり、根が存在することを示すには符号変化も必要である。
- $\ln a > 1/e$ の ln をとるときに不等号の向きを誤ること。ln は増加関数であり両辺とも正なので、向きはそのままでよい。

STEP のその先へ

$0 < a < 1$ のときの根は写像 $x \mapsto a^x$ の不動点（fixed point）であり、反復（iteration）$x_{n+1} = a^{x_n}$ を考えると「無限べき塔（infinite power tower）」$a^{a^{a^{\cdots}}}$ に行き着く。オイ

ラー（Euler）は、この塔が収束するのはちょうど $e^{-e} \leq a \leq e^{1/e}$ のときであることを示した。ここでも同じ境目 $e^{1/e}$ が現れるのである。反復がいつ収束するかを調べていくと、大学 1 年の解析学（analysis）で学ぶ縮小写像の定理（contraction mapping theorem）に至る。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、中間値の定理と必要な予備知識を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。