解答例

STEP I 1997、第 7 問

純粋数学 ・ ガウス求積法

> **STEP I 1997、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q7

鍵となる考え方

両辺はどちらも P に線形（linearly）に依存する。したがって、4 つの基本的な 3 次式（cubic）$1, t, t^2, t^3$ に対して公式が成り立てば、任意の 3 次式に対して成り立つ。こうして問題は、4 つの未知数に関する 4 本の方程式に帰着する。これらは非線形（nonlinear）であるが、奇数次と偶数次のべきがきれいに分かれ、残りは $t = 0$ に関する対称性（symmetry）が片づけてくれる。

解答

$\mathrm{P}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$ とおく。すると

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = c_0 \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t + c_1 \int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t + c_2 \int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t + c_3 \int_{-1}^{1} t^3\,\mathrm{d}t,$$

であり、$a_1\mathrm{P}(u_1) + a_2\mathrm{P}(u_2)$ もまったく同じように分解される。よって、公式がすべての 3 次式に対して成り立つための必要十分条件は、$\mathrm{P}(t) = t^k$（$k = 0, 1, 2, 3$）に対して成り立つことである。（「必要」であるのは、各 t^k 自身が広い意味での 3 次多項式だからであり、「十分」であるのは足し合わせればよいからである。）$k = 0, 1, 2, 3$ に対して $\int_{-1}^{1} t^k\,\mathrm{d}t$ は 2, 0, $\frac{2}{3}$, 0 であるから、次が必要である。

$$a_1 + a_2 = 2, \tag{A}$$

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0, \tag{B}$$

$$a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 = \tfrac{2}{3}, \tag{C}$$

$$a_1 u_1^3 + a_2 u_2^3 = 0. \tag{D}$$

考えてみよう これらの方程式は非線形である。因数分解（factorise）できるような組み合わせはないだろうか。

(D) から (B) の u_2^2 倍を引くと、a_2 を含む項が消えて

$$a_1u_1^3 - a_1u_1u_2^2 = a_1u_1(u_1-u_2)(u_1+u_2) = 0.$$

となる。はじめの 3 つの因数を順に除外していく。

- $a_1 = 0$ のとき：(A) より $a_2 = 2$、(B) より $u_2 = 0$ となり、(C) は $0 = \frac{2}{3}$ となる。これは不可能である。
- $u_1 = 0$ のとき：(B) より $a_2u_2 = 0$ なので $a_2u_2^2 = 0$ となり、やはり (C) は $0 = \frac{2}{3}$ となる。これは不可能である。
- $u_1 = u_2$ のとき：2 点が一致し、(B) は $(a_1+a_2)u_1 = 2u_1 = 0$ となるので $u_1 = u_2 = 0$ であり、ここでも (C) が成り立たない。

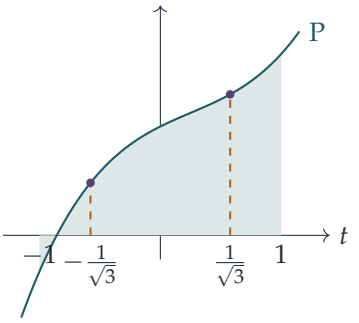
したがって $u_1 \neq 0$ かつ $u_2 = -u_1$ である。このとき (B) は $(a_1-a_2)u_1 = 0$ となるので $a_1 = a_2$ であり、(A) より $a_1 = a_2 = 1$ を得る。最後に (C) より $2u_1^2 = \frac{2}{3}$、すなわち $u_1^2 = \frac{1}{3}$ である。このとき (D) は自動的に満たされる。ゆえに

$$\boxed{a_1 = a_2 = 1, \qquad u_1 = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad u_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}}$$

（あるいは u_1 と u_2 を入れ替えたもの）であり、すなわち

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{P}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + \mathrm{P}\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{すべての 3 次式P.}$$

が成り立つ。この議論から、添字の付け替えを除けば、これが**唯一の**選び方であることもわかる。



どのような 3 次式を描いても、影をつけた部分の面積は 2 本の破線の高さの和に等しい。

検算

- $\mathrm{P}(t) = t^2$：積分は $\frac{2}{3}$ であり、公式は $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ を与える。
- $\mathrm{P}(t) = 1 + t + t^2 + t^3$：積分は $2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ である。公式は、奇数次の項が打ち消し合うので $2 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$ を与える。
- この公式は t^4 に対しては正確**ではない**：公式は $2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ を与えるが、積分は $\frac{2}{5}$ である。したがって、3 次式が本当に限界である。
- 数値的には、10^4 個のランダムな 3 次式に対して、両辺は 10^{-14} 以内で一致した。

よくある間違い

- はじめから対称性（$u_2 = -u_1, a_1 = a_2$）を仮定してしまうこと。すぐに正しい答えは得られるが、ほかの選び方がうまくいかないことは示せない。上の因数分解はそれを示している。
- 両辺を割るときに、$a_1 = 0$ や $u_1 = u_2$ の場合を忘れること。
- $\mathrm{P}(t) = 1$ と t^2 だけを確かめること。対称性を強いるのは、奇数次の条件 (B) と (D) である。

STEP のその先へ

これは 2 点**ガウス求積**（Gaussian quadrature）である。n 個の点と重みをうまく選べば、次数 $2n - 1$ 以下のすべての多項式を正確に積分できる。これは n 個の等間隔の点で達成できる次数の 2 倍である。最良の点は、$[-1, 1]$ 上で直交する（orthogonal）ルジャンドル多項式（Legendre polynomials）の零点である（ここでは $\frac{1}{2}(3t^2 - 1)$ であり、その零点は $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ である）。直交多項式は、大学 1 年次の数値解析（numerical analysis）や微分方程式（differential equations）の解法に登場する。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『微分方程式入門』）では、級数解（series solutions）の章でルジャンドル（Legendre）の方程式を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。