解答例

STEP I 1997、第 6 問

純粋数学 ・ 積分による円周率の評価

> **STEP I 1997、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 4.3 節「22/7 は π より大きい」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/twenty-two-sevenths.html

鍵となる考え方

被積分関数（integrand）は分子の次数が分母の次数より高い有理関数（rational function）である。したがって、まず x^2+1 による多項式の割り算（polynomial division）を行う。すると、容易に積分できる多項式の商（quotient）と、$1+x^2$ を分母にもつ定数の余り（remainder）の項に分かれ、後者を積分すると逆正接関数（arctangent）が現れる。π はこの逆正接関数から出てくるのである。最後の不等式については、$[0,1]$ 上で $1 \leq 1+x^2$ であることを用いて、被積分関数を $x^4(1-x)^4$ そのものと比較する。

解答

割り算

二項定理（binomial theorem）により展開すると、

$$x^4(1-x)^4 = x^4(1-4x+6x^2-4x^3+x^4) = x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4.$$

これを x^2+1 で割る。各段階で最高次の項を取り除いていく：

$$\begin{aligned}
x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4 &= x^6(x^2+1)+\left(-4x^7+5x^6-4x^5+x^4\right)\\
-4x^7+5x^6-4x^5+x^4 &= -4x^5(x^2+1)+\left(5x^6+x^4\right)\\
5x^6+x^4 &= 5x^4(x^2+1)+\left(-4x^4\right)\\
-4x^4 &= -4x^2(x^2+1)+4x^2\\
4x^2 &= 4(x^2+1)-4.
\end{aligned}$$

x^2+1 の倍数をまとめると、

$$x^4(1-x)^4=\left(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4\right)(x^2+1)-4,$$

よって

$$a_6=1,\quad a_5=-4,\quad a_4=5,\quad a_3=0,\quad a_2=-4,\quad a_1=0,\quad a_0=4,\quad b=-4.$$

簡単に確かめておく。$x=0$ のとき右辺は $4\cdot1-4=0$、$x=1$ のとき右辺は $(1-4+5-4+4)\cdot2-4=0$ であり、いずれも左辺と一致する。

$\frac{22}{7}-\pi$ に等しい積分

恒等式の両辺を $1+x^2$（これは決して 0 にならない）で割ると、

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}=x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{1+x^2}.$$

$[0,1]$ 上で項別に積分し、$\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x$ を用いると、

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\tfrac{1}{7}x^7-\tfrac{2}{3}x^6+x^5-\tfrac{4}{3}x^3+4x\right]_0^1-4\Big[\arctan x\Big]_0^1\\
&= \tfrac{1}{7}-\tfrac{2}{3}+1-\tfrac{4}{3}+4\;-\;4\cdot\tfrac{\pi}{4}\\
&= \tfrac{1}{7}+3-\pi\\
&= \frac{22}{7}-\pi,
\end{aligned}$$

となる。ここで $-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}=-2$ および $\arctan1=\frac{\pi}{4}$ を用いた。これが求める結果である。

$x^4(1-x)^4$ の積分

最初に求めた展開式を用いると、

$$\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{5}-\tfrac{4}{6}+\tfrac{6}{7}-\tfrac{4}{8}+\tfrac{1}{9}.$$

公分母 $2520=5\cdot7\cdot8\cdot9$ で通分すると、

$$\frac{504-1680+2160-1260+280}{2520}=\frac{4}{2520}=\frac{1}{630}.$$

π の評価

$f(x) = x^4(1-x)^4$ とおく。すると $0 < x < 1$ において $f(x) > 0$ である。

上からの評価。 $(0,1)$ 上で被積分関数 $f(x)/(1+x^2)$ は連続かつ正であるから、その $[0,1]$ 上の積分は正である。したがって $\frac{22}{7} - \pi > 0$、すなわち $\pi < \frac{22}{7}$ である。

下からの評価。 $0 < x < 1$ のとき $1 + x^2 > 1$ であり、$f(x) > 0$ であるから、

$$\frac{f(x)}{1+x^2} < f(x).$$

> **考えてみよう** 積分どうしの不等式が単なる $\leq$ ではなく、等号を含まない不等式になるのはなぜか？

差 $f(x) - \dfrac{f(x)}{1+x^2} = \dfrac{x^2 f(x)}{1+x^2}$ は開区間 $(0,1)$ 全体で連続かつ正であるから、その $[0,1]$ 上の積分は正である。（連続関数が非負であり、かつどこかで正の値をとるならば、その積分は正である。）よって

$$\frac{22}{7} - \pi = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{630},$$

であり、これを整理すると $\pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630}$ となる。二つの評価を合わせると、

$$\frac{22}{7} > \pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630},$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- 数値的には $\frac{22}{7} - \pi \approx 0.0012645$ であり、最初の積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、小数第 12 位まで同じ値が得られる。
- $\frac{1}{630} \approx 0.0015873$ であり、0.0012645 より十分大きい。得られた評価は $3.141270 < \pi < 3.142857$ を意味し、実際 $\pi \approx 3.141593$ である。
- 値 $\frac{1}{630}$ は、ベータ積分（beta integral）の公式 $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$ からも得られる。実際、$\dfrac{4!\,4!}{9!} = \dfrac{576}{362880} = \dfrac{1}{630}$ である。

よくある間違い

- 割り算の筆算で、二つの 0 である係数 a_3 と a_1 を落としてしまうこと。すべての次数の位置を保っておかないと、余りを誤る。

- $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\ln 2$ と書いてしまうこと（$\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ と混同している）。正しくは $4\arctan 1 = \pi$ である。
- 最後の段階で $\leq$ しか証明しないこと。問題は等号を含まない不等式を求めているので、二つの積分が等しくなりえない理由を述べること。

STEP のその先へ

20 世紀に発見されたこの美しい積分は、教科書でおなじみの近似値 $\frac{22}{7}$ が π より大きいことを一挙に示している。$x^n(1-x)^n$ に簡単な関数を掛けて積分し、その結果が小さいが正であることを示すという同じ発想は、π や e が無理数（irrational）であることの古典的な証明の原動力となっている。すなわち、0 と 1 の間に整数は存在しえない、という論法である。$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x$ のような積分はベータ関数（beta function）の値であり、大学 1 年の解析学や確率論で出会う。積分どうしの等号を含まない不等式の注意深い扱いについては、Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学の理解』）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。