解答例

STEP I 1997、第 5 問

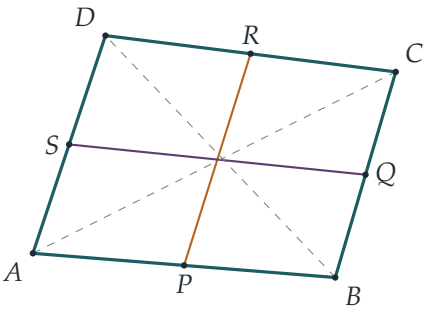
純粋数学 • 幾何におけるベクトル

> **STEP I 1997、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q5

鍵となる考え方

長さの 2 乗は内積（dot product）であり、中点（mid-point）は平均であるから、位置ベクトル（position vector）を使えば恒等式全体が代数の計算に帰着する。役に立つ工夫は、両辺がどちらも対角線（diagonal）AC と BD をひそかに含んでいることに気づくことである。それぞれの差を $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ で表してしまえば、恒等式はおのずと導かれる。その後の結論を導くには、4 本の棒の長さが決して変わらないという事実だけを使えばよい。

解答



任意の原点に関する A, B, C, D の位置ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ とし、$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ と書く。中点は

$$\mathbf{p} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \quad \mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}), \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}), \quad \mathbf{s} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a}).$$

である。

4つの辺

それぞれを $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ と展開すると、2乗の項 $|\mathbf{a}|^2, \ldots, |\mathbf{d}|^2$ は両辺にそれぞれ1回ずつ現れて打ち消し合い、

$$\begin{aligned}|AB|^2 + |CD|^2 - |AD|^2 - |BC|^2 &= -2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{d} + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{d} + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\ &= 2(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}).\end{aligned}$$

が残る（$(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b})$ を展開すれば、この因数分解が正しいことを確かめられる）。言い換えれば、これは $-2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ である。

中点を結ぶ2本の線分

$$\overrightarrow{PR} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{u}, \qquad \overrightarrow{QS} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{v},$$

とおく。

> **考えてみよう** 4項からなる2乗を2つも展開せずに、$|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2$ を求めるにはどうすればよいか。

ベクトルについての2乗の差の公式 $|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ を使う。これは $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ であるから成り立つ。ここで

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = 2(\mathbf{d}-\mathbf{b}), \qquad \mathbf{u}-\mathbf{v} = 2(\mathbf{c}-\mathbf{a}),$$

であるから、

$$|PR|^2 - |QS|^2 = \tfrac{1}{4}(|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2) = (\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}.$$

となる。

2つの結果を合わせる

辺についての結果に、中点についての結果の2倍を加えると、

$$\begin{aligned}&|AB|^2 + |CD|^2 - |AD|^2 - |BC|^2 + 2(|PR|^2 - |QS|^2)\\ &\quad = 2(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) + 2(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) = 0,\end{aligned}$$

となり、これを整理すると

$$|AB|^2 + |CD|^2 + 2|PR|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|QS|^2,$$

が得られ、示すべき式となる。凸性（convexity）も、さらには4点が同一平面上にあることさえも一度も使っていないので、この恒等式は任意の4点について成り立つ。四辺形（quadrilateral）が折れ曲がって2本の棒が交差している場合も含まれる。

結論を導く

恒等式を変形すると

$$|PR|^2 - |QS|^2 = \tfrac{1}{2}(|AD|^2 + |BC|^2 - |AB|^2 - |CD|^2).$$

となる。棒は剛体であるから、継ぎ目がどのように曲がっても右辺の 4 つの長さは決して変わらない。したがって、$|PR|^2 - |QS|^2$ は運動の間ずっと一定である。同じことであるが、対角線の内積 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ は、対角線そのものの長さと向きが変わっても一定に保たれる。

検算

- 辺の長さが a と b の長方形（rectangle）では、$|AB| = |CD| = a$、$|AD| = |BC| = b$ であり、PR と QS は向かい合う辺の中点を結ぶから、$|PR| = b$、$|QS| = a$ である。恒等式の両辺はどちらも $2a^2 + 2b^2$ に等しい。
- ひし形（rhombus）では 4 辺がすべて等しいので、結論はどの位置でも $|PR| = |QS|$ となることを主張する。実際、ひし形の対角線は直交するから、$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ である。
- 数値的には、10^5 個のランダムな四辺形に対して、恒等式は誤差 10^{-12} 以内で成り立つ。$|AB| = 3$、$|BC| = 4$、$|CD| = 5$、$|DA| = 6$ のリンク機構（linkage）を約 200 通りの位置に動かしたところ、$|PR|^2 - |QS|^2$ は終始 $\frac{1}{2}(36 + 16 - 9 - 25) = 9$ のままであった。

よくある間違い

- どの辺とどの辺が組になるかを取り違えること。PR は AB と CD の中点を結ぶ線分であり、恒等式で PR と同じ側に現れるのはまさにこの 2 辺である。
- A を原点に、B を座標軸上に置くといった座標設定を使い、一般の四辺形では残りの点をすべて自由に取らなければならないことを忘れること。ベクトルを使えば、このような管理の手間が省ける。

STEP のその先へ

点 P, Q, R, S は常に平行四辺形（parallelogram）をなし（ヴァリニョンの定理（Varignon's theorem））、PR、QS はその対角線である。ここでの恒等式は、平行四辺形の法則（parallelogram law）$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$ の親戚である。この法則は、大

学 1 年次の線形代数（linear algebra）の講義において、内積（inner product）から得られるノルム（norm）をちょうど特徴づけるものである。機構が動いている間も一定に保たれる量、すなわち不変量（invariant）という考え方は、数学のいたるところに繰り返し現れる。内積とその一般化がきちんと展開される様子を見るには、Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい出発点である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。