解答例

STEP I 1997、第 4 問

純粋数学 ・ 絶対値を含む方程式

> **STEP I 1997、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q4

鍵となる考え方

各絶対値（modulus）の項は、その中身が零になるところでのみ式の形が変わる。したがって四つの「臨界点」（critical points）$x = -1, 0, 1, 2$ によって実数直線は五つの区間に分けられる。各区間では、どの絶対値も符号の定まったふつうの括弧に置き換えることができ、左辺は一次関数（linear function）となるので、方程式は容易に解ける。注意すべき点はただ一つ、一次方程式の根は、考えている区間に属するときに限り解として数えられるということである。

解答

$L(x) = |x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2|$ とおく。$t \geq 0$ のとき $|t| = t$、$t < 0$ のとき $|t| = -t$ であったことを思い出そう。区間を右から左へ順に調べていく。

$x \geq 2$. 四つの中身はすべて非負であるから、

$$\begin{aligned} L(x) &= (x+1) - x + 3(x-1) - 2(x-2) \\ &= x + 1 - x + 3x - 3 - 2x + 4 = x + 2. \end{aligned}$$

方程式は $x + 2 = x + 2$ となり、これは $x \geq 2$ を満たす**すべての**実数に対して成り立つ。よって区間 $x \geq 2$ 全体が解からなる。

> ? **考えてみよう** 方程式が恒等式（identity）になってしまった。計算を間違えたのだろうか？

そうではない。$x \to \infty$ のとき、各絶対値における x の係数の和は $1 - 1 + 3 - 2 = 1$、

定数項の和は $1-0-3+4=2$ であり、これは右辺 $x+2$ とちょうど一致する。絶対値を含む方程式が区間全体を解にもつことは十分にありうるし、問題文の「すべての解を求めよ」という表現は、このようなことが起こるかもしれないというヒントになっている。簡単に確かめておくと、$x=3$ では $L(3)=4-3+6-2=5=3+2$ である。

$1 \le x < 2$. このとき $x-2<0$ であるから $|x-2|=-(x-2)$ となり、

$$L(x)=(x+1)-x+3(x-1)+2(x-2)=5x-6.$$

$5x-6=x+2$ より $x=2$ を得るが、これは $[1,2)$ に属さない。（これは解ではあるが、すでに数えてある。）新しい解はない。

$0 \le x < 1$. このとき $x-1<0$ でもあるから、

$$L(x)=(x+1)-x-3(x-1)+2(x-2)=-x.$$

$-x=x+2$ より $x=-1$ を得るが、これは $[0,1)$ に属さない。解はない。

$-1 \le x < 0$. このとき $|x|=-x$ でもあるから、

$$L(x)=(x+1)+x-3(x-1)+2(x-2)=x.$$

方程式 $x=x+2$ は解をまったくもたない。

$x < -1$. 四つの中身はすべて負であるから、

$$L(x)=-(x+1)+x-3(x-1)+2(x-2)=-x-2.$$

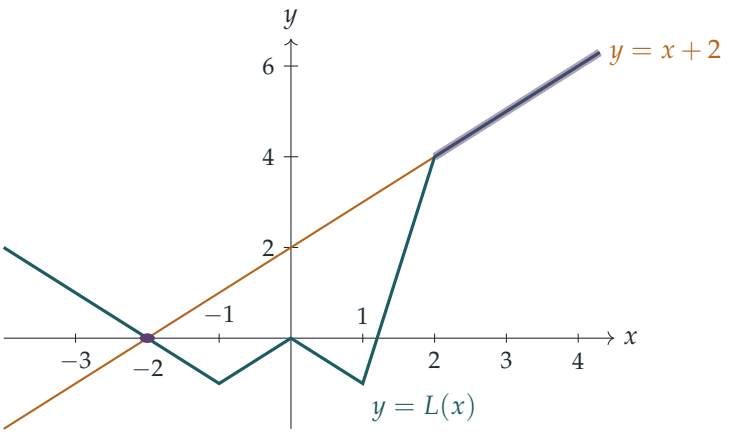
$-x-2=x+2$ より $x=-2$ を得て、$-2<-1$ であるから、これは確かに解である。確認すると $L(-2)=1-2+9-8=0=-2+2$ である。

結論。 解は

$$x=-2 \qquad \text{およびすべての} x \ge 2.$$

である。

グラフを見るとその理由がわかる。$y=L(x)$（ティール）は線分をつないだジグザグであり、直線 $y=x+2$（アンバー）と $x=-2$ で一度交わり、その後 $x=2$ から先はこの直線に重なっている。



検算

いくつかの値を代入してみる。$L(-2) = 0 = -2+2$、$L(5) = 6-5+12-6 = 7 = 5+2$ である一方、$x = 0$ では $L(0) = 1+3-4 = 0 \neq 2$ となる。厳密な分数計算を行うコンピュータにより、100,000 個の無作為な点で L の五つの一次式が正しいことが確認された。また、$[-20, 20]$ 上の刻み幅 0.01 の格子点では、方程式は $x = -2$ と $x \geq 2$ を満たすすべての格子点でちょうど成り立ち、それ以外では成り立たないことも確認された。

よくある間違い

- $x \geq 2$ に対して $x+2 = x+2$ を得たとき、区間全体が解であると認識せずに、「解なし」あるいは「解が無数にあるので、どこかで間違えた」と書いてしまう。
- 考えている区間の外にある根、たとえば（$0 \leq x < 1$ から得られる）$x = -1$ を解として採用してしまう。
- 外側の領域 $x < -1$ を忘れてしまう。孤立した解 $x = -2$ はまさにここにある。

STEP のその先へ

L のような関数は**区分的に線形**（piecewise linear）である。すなわち連続（continuous）であって、有限個の「角」の間では一次式になっている。このような関数は線形計画法（linear programming）や最適化（optimisation）において中心的な役割を果たし、そこでは絶対値の和 $\sum |x - a_i|$ を最小化すると、平均（mean）ではなく中央値（median）が現れる。また、連続であるが孤立した点で微分可能（differentiable）でない関数の最初の例でもあり、この主題は Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）で丁寧

に展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。