解答例

STEP I 1997、第 3 問

純粋数学 ・ 累乗と一の位の数

> **STEP I 1997、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q3

鍵となる考え方

何よりもまず、a_7 を 3 の冪として一つにまとめて表す。3 の冪を 3 乗すると、指数が 3 倍になるだけである。そのあとは、各小問がこの一つの巨大な数について異なる問いを投げかけている。最後の桁は指数を 4 で割った余り（modulo）だけで決まる。3 の冪の最後の桁は周期（period）4 で繰り返すからである。大きさの評価には、10 の冪との大雑把な比較があれば十分である。最後の小問はこの大きさの評価に基づく。a_7 が巨大なので、$1/a_7$ は無視できるほど小さい。

解答

まず閉じた形（closed form）を求める。$a_n = 3^k$ ならば $a_{n+1} = (3^k)^3 = 3^{3k}$ であるから、各段階で指数が 3 倍される。$a_1 = 3^1$ から始めて、数学的帰納法（induction）により

$$a_n = 3^{3^{n-1}}, \qquad \text{したがって} \qquad a_7 = 3^{3^6} = 3^{729}.$$

小問 (i)

積の一の位（units digit）は、各因数の一の位だけで決まる。したがって、直前の一の位に 3 を掛けて一の位だけを残すことで、3^k の最後の桁を追跡できる。

k	1	2	3	4	5	$\cdots$
一の位：3^k	3	9	7	1	3	$\cdots$

$k = 4$ で 1 に戻ると、そこから 3, 9, 7, 1 という並びが周期 4 で繰り返す。（言い換えると、$3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$ であるから、$3^{4m+r} \equiv 3^r \pmod{10}$ となる。）

考えてみよう 筆算の割り算をせずに、729 を 4 で割った余りを求めるにはどうすればよいか。

$3 \equiv -1 \pmod 4$ であるから、$3^6 \equiv (-1)^6 = 1 \pmod 4$ である。（直接計算すると $729 = 4 \times 182 + 1$ である。）よって $3^{729} = 3^{4\cdot 182+1}$ の一の位は 3^1 の一の位と同じであり、

よってa_7 の一の位は3.

小問 (ii)

指数を 3 ずつまとめる。$729 = 3 \times 243$ であるから

$$a_7 = 3^{729} = \left(3^3\right)^{243} = 27^{243} > 10^{243} \geq 10^{100},$$

ここで $27 > 10$ を用いた（また、正の数を正の冪に上げても大小関係が保たれることも用いた）。よって、求めるとおり $a_7 \geq 10^{100}$ である。この評価はまったく精密ではない。実際、a_7 は 348 桁の数である。

小問 (iii)

分数を分ける。

$$\frac{a_7 + 1}{2a_7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a_7}.$$

$a_7 > 0$ であるから、第 2 項は正である。また小問 (ii) より、これは非常に小さい。

$$0 < \frac{1}{2a_7} \leq \frac{1}{2 \times 10^{100}} < 10^{-100}.$$

したがって

$$0.5 < \frac{a_7 + 1}{2a_7} < 0.5 + 10^{-100} < 0.505.$$

0.5 より大きく 0.505 より小さい数はすべて、小数第 2 位まで丸めると 0.50 になる。小数第 3 位は 0 であり、切り上げが起こる 5 にはほど遠いからである。よって

$$\frac{a_7 + 1}{2a_7} = 0.50 \quad \text{（小数第 2 位まで）}$$

実際、その小数展開は 0.5000... で始まり、5 のあとに少なくとも 100 個の 0 が続く。

検算

コンピュータなら 3^{729} を正確に扱える。3 を 6 回続けて 3 乗して計算すると、$a_7 = 3^{729}$ が 348 桁で最後の桁が 3 の数であること、そして $27^{243} = 3^{729} > 10^{243}$ であること

が確認できる。正確な分数で計算すると、$\frac{a_7+1}{2a_7}$ が $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2}+10^{-100}$ の間に（等号なしで）あることも確認できる。より小さな規模で小問 (i) の方法を試すこともできる。$a_2 = 3^3 = 27$ の指数は $3 \equiv 3 \pmod 4$ であり、一の位は 7 と予測されるが、実際そのとおりである。

よくある間違い

- a_7 を 3^{3^6} ではなく $3^{3\cdot 7}$ や 3^{18} と読んでしまう。各段階で指数は 3 を足されるのではなく、3 倍されるのである。
- 指数を 4 ではなく 10 で割った余りに帰着させてしまう。一の位は周期 4 で循環するので、重要なのは指数を 4 で割った余りである。
- 小問 (iii) で、根拠を示さずに「0.5」と書いてしまう。「小数第 2 位まで正確に」とは 0.50 のことであり、値が 0.505 に達しないことを示す評価が必要である。

STEP のその先へ

小問 (i) は、合同算術（modular arithmetic）とオイラー（Euler）の定理への最初の入口である。$\varphi(10) = 4$ であるから $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$ となる。この帰着を塔の段ごとに繰り返し用いることで、整数論の研究者は $3^{3^{3^3}}$ のような巨大な冪の塔（power tower）の最後の桁を求める。Davenport の *The Higher Arithmetic*（高等整数論の入門書）は、合同式（congruence）と元の位数（order of an element）を一から展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。