解答例

STEP I 1997、第 2 問

純粋数学 ・ 逆三角関数の導関数

> **STEP I 1997、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q2

鍵となる考え方

小問 (i) では f の導関数（derivative）がゼロになってしまうので、f は定数である。ただしそれは、関数が定義されている各区間の上に限ってのことである。点 $x = -1$ が実数直線を二つに分けており、その両側で定数の値は異なる。小問 (ii) では、y について x を微分し、その結果の逆数をとるほうが易しい。手間がかかるのは $\sin y^2$ と $\cos y^2$ を x と y で書き直す部分であり、そこで y の範囲が重要になる。

解答

小問 (i)

この関数は $x \neq -1$ を満たすすべての点で定義される。$u = \dfrac{1-x}{1+x}$ とおく。商の微分法（quotient rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}, \qquad 1+u^2 = \frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{(1+x)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x)^2}.$$

合成関数の微分法（chain rule）による $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}u = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ を用いると、

$$\begin{aligned} \mathrm{f}'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \qquad (x \neq -1). \end{aligned}$$

考えてみよう $f'(x) = 0$ は、f がいたるところで同じ定数であることを意味するだろうか。

そうではない。導関数がゼロであることから関数が定数であると結論できるのは、**区間**（interval）の上に限られる（これは平均値の定理（mean value theorem）から従う）。f の定義域は $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ であり、これは二つの区間からなる。したがって f はそれぞれの部分で定数となるが、二つの定数は異なっていてもよい。それぞれの定数は、都合のよい点での値を計算するか、極限をとることで求められる。

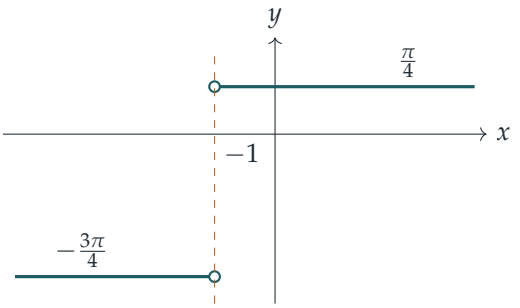
$x > -1$ のとき： $x = 0$ とおく。すると $f(0) = \tan^{-1} 0 + \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ である。

$x < -1$ のとき： $x \to -\infty$ とする。このとき $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$ であり、一方 $\dfrac{1-x}{1+x} \to -1$ であるから、$\tan^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \to -\frac{\pi}{4}$ となる。f はこの区間で定数なので、その定数は極限値 $-\frac{3\pi}{4}$ に等しい。（別の方法として、$x = -\sqrt{3}$ とすると $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -(2+\sqrt{3}) = -\tan\frac{5\pi}{12}$ となるので、$f(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{12} = -\frac{3\pi}{4}$ である。）

よって

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & x > -1, \\ -\dfrac{3\pi}{4}, & x < -1. \end{cases}$$

$x = -1$ における π の跳びが生じるのは、そこで $\dfrac{1-x}{1+x}$ が $-\infty$ から $+\infty$ へ一気に移り、そのためその逆正接（inverse tangent）が $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ へ跳ぶからである。



小問 (ii)

$x = y \sin y^2$ を、積の微分法（product rule）と合成関数の微分法を用いて y で微分すると、

$$\frac{dx}{dy} = \sin y^2 + 2y^2 \cos y^2.$$

次に、二つの三角関数の項をともに x と y で表す。

- $y > 0$ であるから y で割ることができ、$\sin y^2 = \dfrac{x}{y}$ となる。
- $0 < y^2 < \frac{\pi}{2}$ であるから $\cos y^2 > 0$ であり、したがって**正の**平方根をとる：

$$\cos y^2 = \sqrt{1 - \sin^2 y^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y},$$

ここで最後の等号では $\sqrt{y^2} = y$ を用いた。これは $y > 0$ より成り立つ。

したがって

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y} + 2y\sqrt{y^2 - x^2} = \frac{x + 2y^2\sqrt{y^2 - x^2}}{y}.$$

$x > 0$、$y > 0$ であり、平方根は非負であるから、これは真に正である。よって逆数をとることができ（逆関数の微分法（inverse function rule）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ は $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \neq 0$ となるところで成り立つ）、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x + 2y^2\sqrt{y^2 - x^2}},$$

となって、示すべき式が得られた。

考えてみよう なぜ問題では $0 < y < (\pi/2)^{1/2}$ という条件が課されているのだろうか。

この条件がなければ $\cos y^2$ は負になりうるので、正しい公式では平方根の前に負号がつくことになる。またこの制限により、$y \sin y^2$ はこの範囲で狭義単調増加（strictly increasing）となり（上で求めた導関数は正である）、0 から $(\pi/2)^{1/2}$ まで増加する。したがって $0 < x < (\pi/2)^{1/2}$ を満たす各 x に対して y がちょうど一つ対応し、y は確かに x の関数となる。

検算

- 小問 (i)：$\mathrm{f}(1) = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}$ であり、$\mathrm{f}(-3) = \tan^{-1}(-3) + \tan^{-1}(-2) \approx -1.2490 - 1.1071 = -2.3562 \approx -\frac{3\pi}{4}$ である。両方の定数を 10,000 個の無作為に選んだ点で確かめた。
- 小問 (ii)：$x = 0.5$ のとき、$y \sin y^2 = 0.5$ を数値的に解くと $y \approx 0.81355$ となり、公式からは $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx 0.60284$ が得られる。これは数値的に求めた逆関数の有限差分（finite difference）による導関数と一致する。
- $x = 0$ の近くでは $y \sin y^2 \approx y^3$ であるから、$y \approx x^{1/3}$ であり、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx \frac{1}{3y^2}$ となる。公式からは $y/(y^3 + 2y^3) = \frac{1}{3y^2}$ が得られ、一致する。

よくある間違い

- $x = -1$ が定義域を分けていることを忘れて、すべての x について $f(x) = \frac{\pi}{4}$ と結論してしまう。
- $\cos y^2 = \pm\sqrt{\cdots}$ と書いたまま、なぜ正の根が正しいのかを述べない。

STEP のその先へ

$f' = 0$ から定数が得られるのは定義域の連結な（connected）部分ごとに限られるという事実は、平均値の定理の帰結である。平均値の定理は、大学の解析学（analysis）の講義で最初に出会う大きな結果の一つである。小問 (ii) は逆関数定理（inverse function theorem）のごく簡単な場合にあたる。すなわち、導関数が 0 でない関数は局所的に逆関数をもち、その逆関数の導関数はもとの導関数の逆数である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、この両方を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。