解答例

STEP I 1997、第 13 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

> **STEP I 1997、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q13

鍵となる考え方

ブロンド氏が明かりをつけるべきかどうかは、どの種類の罠が待ち構えているかだけで決まる。したがって問題全体は、カナリアがいないという条件のもとで、罠が爆弾ではなくアナコンダである確率という、ただ一つの条件付き確率（conditional probability）に帰着する。暗殺者がだれであるかが意味をもつのは、それがどの凶器が使われるかに影響するからにすぎない。そこで、二つの段階（暗殺者、次に凶器）を全確率の法則（law of total probability）で組み合わせ、「カナリアでない」という条件をつけ、そのうえで二つの死亡の危険を比較する。

解答

設定

$i = 1, 2, 3, 4$ に対して、i 氏が罠を仕掛けたという事象を M_i とし、罠がアナコンダ、爆弾、カナリアであるという事象をそれぞれ A、B、C とする。与えられているのは

$$P(M_i) = \frac{i}{10}, \qquad P(A \mid M_i) = \frac{i+1}{10}, \quad P(B \mid M_i) = \frac{i}{10}, \quad P(C \mid M_i) = \frac{9-2i}{10}.$$

である。これらは矛盾していない。実際、$\frac{1+2+3+4}{10} = 1$ であり、各 i について三つの凶器の確率はいずれも非負で、和は $\frac{(i+1)+i+(9-2i)}{10} = 1$ となる。関わる暗殺者はちょうど一人、凶器もちょうど一つであるから、事象 $M_i \cap A$、$M_i \cap B$、$M_i \cap C$ はすべての可能性の分割（partition）をなす。

静けさが教えること

全確率の法則により、

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(M_i)P(A \mid M_i) = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5}{100} = \frac{40}{100},$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(M_i)P(B \mid M_i) = \frac{1 + 4 + 9 + 16}{100} = \frac{30}{100}.$$

よって $P(C') = P(A) + P(B) = \frac{70}{100}$ である。（検算として、$P(C) = \frac{7+10+9+4}{100} = \frac{30}{100}$ となる。）

> **考えてみよう** いまどの暗殺者が最も疑わしいかを求める必要はあるだろうか？

その必要はない。鳴き声が聞こえないことで各暗殺者の見込みは確かに変わるが、死亡の危険は凶器だけで決まる。$A \subseteq C'$ かつ $B \subseteq C'$ であるから、C' で条件づけることは二つの確率を単に定数倍するだけである：

$$P(A \mid C') = \frac{P(A)}{P(C')} = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}, \qquad P(B \mid C') = \frac{P(B)}{P(C')} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}.$$

暗殺者についての情報は、すでにこの二つの数に織り込まれている。

二つの選択の比較

ブロンド氏が殺されるという事象を K とする。C' で条件づければ、罠はアナコンダか爆弾のどちらかであり、彼の運命は罠と彼の選択だけで決まる。

明かりをつける場合。 爆弾は確率 $\frac{1}{2}$ で彼を殺し、アナコンダは確率 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ で彼を殺す。よって

$$P(K \mid C',\ \text{点灯}) = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{3} = \frac{9}{42} + \frac{8}{42} = \frac{17}{42}.$$

明かりをつけない場合。 爆弾が彼を殺すことはなく、アナコンダは確率 $\frac{1}{2}$ で彼を殺す。よって

$$P(K \mid C',\ \text{消灯}) = \frac{3}{7}\cdot 0 + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{7} = \frac{12}{42}.$$

$\frac{12}{42} < \frac{17}{42}$ であるから、**ブロンド氏は明かりをつけずに部屋に入るべきである。** このとき生き延びる確率は $\frac{5}{7}$（約 71%）であり、明かりをつけた場合の $\frac{25}{42}$（約 60%）を上回る。

その理由は、より起こりやすい罠はアナコンダであるが、明かりによって本当に事態が悪化するのは爆弾のほうだからである。明かりをつけると、アナコンダによる危険は $\frac{1}{2}$ から $\frac{1}{3}$ に下がるが、爆弾による危険は 0 から $\frac{1}{2}$ に上がる。アナコンダである確率が $\frac{4}{7}$ なので、明かりによって $\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{6} = \frac{4}{42}$ だけ危険が減る。一方、爆弾である確率が $\frac{3}{7}$ なので、$\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{42}$ だけ危険が増える。増えるほうが大きいのである。

検算

- 耳を澄ます前であれば、危険は明かりをつける場合 $\frac{30}{100}\cdot\frac{1}{2}+\frac{40}{100}\cdot\frac{1}{3}$、つけない場合 $\frac{40}{100}\cdot\frac{1}{2}$ となる。これらは上の答えをそれぞれ $\frac{7}{10}$ 倍したものであり、そうなるべきである。カナリアはどちらの比較にも何の寄与もしないからである。
- 明かりをつけない戦略のほうがよいのは、$p=P(A\mid C')$ が $\frac{1}{2}p<\frac{1}{2}(1-p)+\frac{1}{3}p$ を満たすとき、すなわち $p<\frac{3}{4}$ のときである。ここでは $p=\frac{4}{7}$ であり、余裕をもってこれを下回っている。
- 10^6 回の晩をシミュレーションすると、死亡率は明かりをつけた場合約 0.404、つけない場合約 0.286 となり、$\frac{17}{42}\approx 0.405$ および $\frac{2}{7}\approx 0.286$ と一致する。

よくある間違い

- 「カナリアでない」という条件をつけ忘れ、$P(A)=0.4$ と $P(B)=0.3$ をそれがすべてであるかのように用いてしまう。結論としての助言は同じになるが、死亡の確率は誤りとなる。
- 生存と死亡を取り違える。明かりをつけた場合のアナコンダの数値は**生き延びる**確率が $\frac{2}{3}$ ということであり、したがって死亡の確率は $\frac{1}{3}$ である。
- 暗殺者を同様に確からしいものとして扱う、あるいは暗殺者の段階を無視して凶器の確率を平均してしまう。

STEP のその先へ

これは**決定理論**（decision theory）の小さな問題である。事後分布（posterior distribution）のもとで期待損失（expected loss）を最小にする行動を選ぶのであり、ここでの「損失」は単に死亡の確率である。$P(A\mid C')$ だけが問題になるという観察や、最適な行動が切り替わる閾値 $p<\frac{3}{4}$ は、こうした意思決定の分析に典型的なものである。すなわち、データが事後分布を変え、事後分布が行動を決めるのである。条件付き確率とベイズ更新（Bayesian updating）についてさらに知りたければ、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。