解答例

STEP I 1997、第 11 問

力学 ・ 抵抗を受ける運動

> **STEP I 1997、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q11

鍵となる考え方

抵抗（resistance）は速度に依存するが、求めたいのは時間ではなく**距離**の関数としての速度である。そこで加速度（acceleration）を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\frac{1}{2}v^2)$ と書く。$w = v^2$ を未知関数とすると、運動方程式（equation of motion）は**線形**（linear）の一階微分方程式（first-order differential equation）となり、積分因子（integrating factor）によってただちに解ける。最後の小問は一つの物理的事実にかかっている。すなわち、抵抗はつねに運動を妨げる向きにはたらくので、粒子が向きを変えると抵抗の向きも変わる。

解答

粒子を鉛直線上を運動する単位質量の質点としてモデル化する。粒子には重力 g（下向き）と、速度と逆向きにはたらく大きさ kv^2 の抵抗が作用する。s は投射点から上向きに測る。



上昇中



下降中

上昇する運動

粒子が上昇している間、速度 v は上向きなので、抵抗 kv^2 は重力とともに下向きにはたらく。ニュートン（Newton）の第二法則（質量 1）より

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -g - kv^2,$$

を得る。ここで $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ を用いた。$w = v^2$ とおくと $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} = 2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} + 2kw = -2g.$$

これは w について線形である。積分因子 e^{2ks} を掛けると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(w\,\mathrm{e}^{2ks}) = -2g\,\mathrm{e}^{2ks} \quad\Longrightarrow\quad w\,\mathrm{e}^{2ks} = -\frac{g}{k}\,\mathrm{e}^{2ks} + C.$$

$s = 0$ で $w = u^2$ なので、$C = u^2 + \frac{g}{k}$ である。よって

$$v^2 = \Big(u^2 + \frac{g}{k}\Big)\mathrm{e}^{-2ks} - \frac{g}{k} = u^2\mathrm{e}^{-2ks} + \frac{g}{k}(\mathrm{e}^{-2ks} - 1),$$

となり、これが求める $(*)$ である。（$v\,\mathrm{d}v/(g + kv^2) = -\mathrm{d}s$ と変数分離（separating variables）して対数を得る方法でも同様にうまくいく。）

最高点の高さ

粒子は $v = 0$ となったときに上昇をやめる。$(*)$ の右辺は s について狭義単調減少なので、これはちょうど一度だけ、最高点の高さ H で起こる。$(*)$ で $v = 0$ とおくと

$$\Big(u^2 + \frac{g}{k}\Big)\mathrm{e}^{-2kH} = \frac{g}{k} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{2kH} = 1 + \frac{ku^2}{g},$$

したがって

$$H = \frac{1}{2k}\ln\Big(1 + \frac{ku^2}{g}\Big).$$

下降する経路

> **考えてみよう** $(*)$ の導出では運動の向きにまったく触れていない。それなら、なぜ $(*)$ が引き続き成り立たないのだろうか。

実は、導出では抵抗の符号という形で運動の向きを使っている。下降中は速度が下向きなので、抵抗 kv^2 は重力に逆らって**上向き**にはたらく。s は引き続き上向きに測り、v を上向きの速度とすると、方程式は

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -g + kv^2, \qquad \text{ゆえに} \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} - 2kw = -2g,$$

となり、異なる微分方程式になる。したがって、下降する経路では $(*)$ は成り立たない。

これを具体的に確かめるため、$s = H$ で $w = 0$ という条件のもとで新しい方程式を解く。積分因子 e^{-2ks} により $w = \frac{g}{k} + D\mathrm{e}^{2ks}$ を得て、$w(H) = 0$ から $D = -\frac{g}{k}\mathrm{e}^{-2kH}$ が定まる。すなわち

$$v^2 = \frac{g}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-2k(H-s)}\right) \qquad (0 \le s \le H).$$

$u^2 + \frac{g}{k} = \frac{g}{k}\mathrm{e}^{2kH}$ を用いると、式 $(*)$ は $v^2 = \frac{g}{k}(\mathrm{e}^{2k(H-s)} - 1)$ と書ける。$x = 2k(H-s) \ge 0$ とおくと、二つの式はそれぞれ $\frac{g}{k}(1 - \mathrm{e}^{-x})$ と $\frac{g}{k}(\mathrm{e}^{x} - 1)$ であり、

$$(\mathrm{e}^{x} - 1) - (1 - \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2 = (\mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{e}^{-x/2})^2 > 0 \quad \text{ただし} x > 0.$$

よって $(*)$ は最高点より下のすべての点で誤った速さを与える（両者が一致するのは、ともに 0 となる $s = H$ においてのみである）。$(*)$ は下降中の速さを過大に見積もるのである。

手短な物理的議論もある。式 $(*)$ は v^2 を高さだけの関数として与えるので、もしこれが下降中にも成り立つなら、粒子は各高さを上昇時と同じ速さで通過し、速さ u で出発点に戻ることになる。しかし抵抗は運動全体を通じて負の仕事（work）をするので、粒子はエネルギーを失っており、より遅い速さで戻らなければならない。実際、$s = 0$ において正しい式は

$$v^2 = \frac{g}{k}\left(1 - \frac{1}{1 + ku^2/g}\right) = \frac{u^2}{1 + ku^2/g} < u^2.$$

を与える。

検算

- $k \to 0$ のとき $\ln(1 + ku^2/g) \approx ku^2/g$ なので $H \to u^2/(2g)$ となり、抵抗のない場合のおなじみの高さに一致する。また（$\mathrm{e}^{-2ks} \approx 1 - 2ks$ と展開すると）$(*)$ は $v^2 = u^2 - 2gs$ に近づく。
- 数値的には、$u = 10$、$k = 0.05$、$g = 9.8$ として運動方程式を逐次計算すると $H \approx 4.1224$ となり、$\frac{1}{0.1}\ln(1 + \frac{5}{9.8}) = 4.12245$ と一致する。粒子は $v^2 \approx 66.22$ で戻ってきて、これは $u^2 = 100$ ではなく $u^2/(1 + ku^2/g)$ に一致する。下降の中間点では $v^2 \approx 36.51$ であるのに対し、$(*)$ では 44.87 となってしまう。

よくある間違い

- 運動全体に対する一つの方程式で抵抗を $-kv^2$ と書いてしまうこと。$v^2 \ge 0$ なのでこの項はつねに同じ向きを指し、まさにそれゆえに一つの式で上昇と下降の両方を

扱うことはできない。（一つの方程式で表すには $-kv|v|$ が必要である。）

- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ を用いて v を t の式として解き、その後 t の消去に苦労すること。$v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ を使えば答えに直行できる。

STEP のその先へ

二次抵抗（quadratic drag）は空気中を高速で運動するボールのよいモデルであり、下降の方程式は**終端速度**（terminal velocity）の存在を示している。すなわち、落下が長く続くにつれて $v^2 \to g/k$ となる。抵抗を $-kv|v|$ と書けば運動全体に対する一つの非線形方程式が得られる。大学一年次の力学の多くは、力が速度に依存しエネルギーが保存されない、このような方程式を扱うものである。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、速度に依存する力と終端速度を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。