解答例

STEP I 1997、第 10 問

力学 ・ 円運動

> **STEP I 1997、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q10

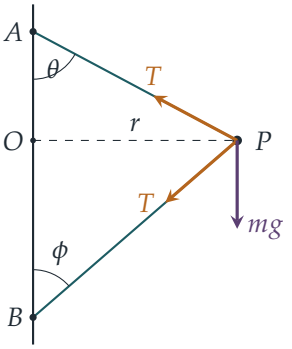
鍵となる考え方

輪はなめらかなので、糸は輪の中を自由に滑る。したがって張力（tension）は P の両側で**等しい**。鉛直方向（鉛直方向の加速度はない）と水平方向（軸に向かう加速度 $r\omega^2$）にそれぞれ力を分解し、一方の式をもう一方の式で割って T と m を消去する。すると和積の公式（sum-to-product formulae）によって、その比は半角の正接（tangent）ひとつにまとまる。

解答

モデルと力

P を軽くて伸びない糸につけられた質点（particle）とみなす。輪はなめらかなので、張力 T は PA でも PB でも同じである。円の中心を O とする。この点は直線 AB 上にあり、$OP = r$ である。P にはたらく力は、重力 mg、張力 T（PA に沿う向き）、張力 T（PB に沿う向き）である。



糸 PA は鉛直方向と角 θ をなす（A における AB と AP のなす角）。したがって、この糸が P を引く力は、上向きに $T\cos\theta$、軸に向かって $T\sin\theta$ の成分をもつ。同様に、PB は B において鉛直方向と角 ϕ をなし、この糸が P を引く力は、下向きに $T\cos\phi$、軸に向かって $T\sin\phi$ の成分をもつ。

運動方程式

P は水平な円周上を一定の速さで運動するので、鉛直方向の加速度はなく、O に向かう加速度 $r\omega^2$ をもつ。力を分解すると、

$$\begin{aligned} &\text{鉛直方向：} \quad T\cos\theta - T\cos\phi = mg, \\ &\text{水平方向：} \quad T\sin\theta + T\sin\phi = mr\omega^2. \end{aligned}$$

これらの式は三角形の形によらず成り立つ（たとえば P が A より上にあれば、$\cos\theta$ が負になるだけである）。$mg > 0$ であるから、第 1 式より $\cos\theta > \cos\phi$ となり、よって $\phi > \theta$ である。つまり、図からも予想されるとおり、下側の糸のほうが軸に対して大きく傾いている。

結果の証明

鉛直方向の式を水平方向の式で割ると、

$$\frac{\cos\theta - \cos\phi}{\sin\theta + \sin\phi} = \frac{g}{r\omega^2}.$$

和積の公式より、

$$\begin{aligned} \cos\theta - \cos\phi &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\,\sin\tfrac{1}{2}(\phi-\theta), \\ \sin\theta + \sin\phi &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\,\cos\tfrac{1}{2}(\phi-\theta). \end{aligned}$$

$0 < \theta < \pi$ かつ $0 < \phi < \pi$ であるから（これらは実際の三角形 APB の角である）、$0 < \frac{1}{2}(\theta+\phi) < \pi$ となり、$\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi) \neq 0$ である。よってこれを約分すると

$$\tan\frac{\phi-\theta}{2} = \frac{g}{r\omega^2},$$

となり、求める式が示された。

張力

考えてみよう 答えには $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)$ が含まれてよいが、$\phi-\theta$ は含まれてはならない。$\cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)$ はどうすれば消去できるだろうか？

水平方向の式と 2 番目の和積の公式から、

$$2T\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\cos\tfrac{1}{2}(\phi-\theta) = mr\omega^2.$$

$\alpha = \frac{1}{2}(\phi-\theta)$ の**正接**はわかっているので、対辺が g、隣辺が $r\omega^2$ の直角三角形から、その余弦が求められる。$0 < \phi-\theta < \pi$ であるから $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であり、$\cos\alpha > 0$ である：

$$\cos\tfrac{1}{2}(\phi-\theta) = \frac{r\omega^2}{\sqrt{r^2\omega^4+g^2}}.$$

これを代入して $r\omega^2$ を約分すると、

$$T = \frac{m\sqrt{r^2\omega^4+g^2}}{2\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)}.$$

この結果は見通しよく理解することもできる。$\sqrt{(mg)^2+(mr\omega^2)^2}$ は 2 つの張力の合力（resultant）の大きさであり、大きさ T の等しい 2 つの力が互いに角 $\pi-(\theta+\phi)$（角 APB）をなすとき、その合力の大きさは $2T\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)$ である。

検算

- $\omega \to \infty$ のとき右辺は 0 に近づくので、$\phi \to \theta$ となる。輪は外側へ振り出され、AB の中点と同じ高さに来る。重力が無視できるときに予想されるとおりである。
- $\omega \to 0$ のとき $\tan\frac{1}{2}(\phi-\theta) \to \infty$ となるので、$\phi-\theta \to \pi$ である。つまり糸は真下にまっすぐ垂れ下がる。回転がなければ、これ以外の状態はありえない。
- 数値的にも確かめた。A、B、P を無作為に配置し、ベクトル形式の運動方程式から T と ω^2 を直接求め、座標から θ と ϕ を測って、両方の結果と比較した。約 8000 通りの場合における相対誤差の最大値は 3×10^{-12} であった。

よくある間違い

- 異なる 2 つの張力 T_1、T_2 を使ってしまう。輪がなめらかなら、糸は 1 本で張力も 1 つである。張力が 2 つの異なる値をとるとすると、問題は定まらない。
- PB の張力の鉛直成分の符号を間違える。この糸は P を B に向かって**下向き**に引く。
- $\cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)$ として負の平方根をとってしまう。そうすると張力が負になってしまう。

STEP のその先へ

糸の長さが与えられたとき、輪は A と B を焦点（foci）とする楕円（ellipse）上にあり、糸は P における接線と等しい角をなす。これは楕円の反射の性質である。したがって張力の合力は楕円の法線（normal）方向を向き、その形に曲げたなめらかな針金からの抗力とまったく同じになる。拘束を面に垂直な力としてとらえる考え方は、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）には、この種の回転する系に関する問題が数多く収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。