解答例

STEP I 1997、第 1 問

純粋数学 • 硬貨の組合せの数え上げ

> **STEP I 1997、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q1

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.5 節「**両替の仕方**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/making-change.html

鍵となる考え方

「方法の数」を数えるには、すべての組合せをちょうど 1 回ずつ列挙する体系的な手順が必要である。自然な手順は、まず最も大きい硬貨の枚数を固定し、次に 2 番目に大きい硬貨の枚数を固定し、以下同様に進めることである。2p 硬貨と 1p 硬貨だけが残れば、数え上げはすぐに済む。2p 硬貨の枚数ですべてが決まるからである。またこの方法をとると、10 ペンスの答えがそのまま 20 ペンスの答えに使える。

解答

順序は関係ない。「方法」とは、各硬貨を何枚ずつ使うかの選び方である。したがって、0 以上の整数（non-negative integers）の解の個数を数えることになる。

基本となる部品：2p 硬貨と 1p 硬貨

2p 硬貨と 1p 硬貨で r ペンスを作るには、2p 硬貨の枚数 b を選べばよい。b は 0 から $\lfloor r/2 \rfloor$ までのどの値でもよい。このとき残りの $r - 2b \geq 0$ ペンスは 1p 硬貨で作られ、その方法はちょうど 1 通りである。よって方法の数は

$$\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1.$$

である。

10 ペンスを作る

- *10p* 硬貨を使う場合。この 1 枚だけで全額になる。1 通りである。
- *10p* 硬貨を使わない場合。5p 硬貨の枚数 0、1、2 で場合分けする。

5p 硬貨の枚数	2p と 1p で作る残り	方法の数 $\lfloor r/2 \rfloor + 1$
2	0	1
1	5	3
0	10	6

これで $1 + 3 + 6 = 10$ 通りとなる。

どの組合せも 10p 硬貨の枚数と 5p 硬貨の枚数が確定しているので、ちょうど 1 回だけ数えられる。合計は $1 + 10 = 11$ 通りであり、求める結果が得られた。

20 ペンスを作る

5p、2p、1p の硬貨で n ペンスを作る方法の数を $F(n)$ と書く。いま見たように $F(10) = 10$ であり、また明らかに $F(0) = 1$ である（硬貨を 1 枚も使わない）。$F(20)$ を求めるには、5p 硬貨の枚数 0 から 4 で場合分けする。

5p 硬貨の枚数	2p と 1p で作る残り	方法の数
4	0	1
3	5	3
2	10	6
1	15	8
0	20	11

よって $F(20) = 1 + 3 + 6 + 8 + 11 = 29$ である。

考えてみよう 20p 硬貨と 10p 硬貨を、重複して数えることなく組み込むにはどうすればよいか。

再び大きい硬貨で場合分けする。20p 硬貨を使う場合、それが唯一の硬貨でなければならないので 1 通りである。使わない場合は、10p 硬貨の枚数で場合分けする。

- 10p 硬貨 2 枚：残りはなく、$F(0) = 1$ 通り。
- 10p 硬貨 1 枚：残りは 10p で、$F(10) = 10$ 通り。
- 10p 硬貨 0 枚：残りは 20p で、$F(20) = 29$ 通り。

これらの場合は互いに排反であり、すべてを尽くしているので、20 ペンスを作る方法の数は

$$1+1+10+29=41.$$

である。

検算

- 10p の場合を手で列挙する：10；5+5；5+2+2+1、5+2+1+1+1、5+1×5；さらに 2×5、2×4+1×2、...、1×10（これらが 6 通り）。合わせて 11 通りである。
- 各硬貨の枚数についてループを回す短いプログラムで数えると、11 と 41 が得られる。途中の値 $F(10)=10$ と $F(20)=29$、および 20p 硬貨を使わない場合が 40 通りであることも確認できる。
- 小さな場合は手で簡単に確かめられる。5p、2p、1p の硬貨で 5p を作る方法は $F(5)=4$ 通りであり、$1+3$ と一致する。

よくある間違い

- 順序を区別して数えてしまい、5+2+2+1 と 2+5+1+2 を別の「方法」としてしまう。これらは同じ硬貨の集まりである。
- 硬貨 1 枚だけの方法、すなわち 10p 硬貨 1 枚と 20p 硬貨 1 枚を忘れる。
- 体系的な手順を示さずに合計だけを答える。問題文には説明のない答えには得点を与えないと注意されているので、場合分けそのものが要点である。

STEP のその先へ

これらは、決まった集合の要素を部分とする n の**分割**（partition）である。これを扱うすっきりした方法は母関数（generating function）である。方法の数は

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})},$$

における x^n の係数であり、われわれの場合分けは、これらの因数を 1 つずつ掛け合わせて展開しているにすぎない。母関数は数え上げの問題を代数に変え、分割に関するオイラー（Euler）やラマヌジャン（Ramanujan）の研究へとつながっていく。これを探究するのによい出発点は Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* であり、整数論の側面については Davenport の *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。