解答例

STEP III 1996、第 9 問

力学 ・ 円運動

> **STEP III 1996、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q9

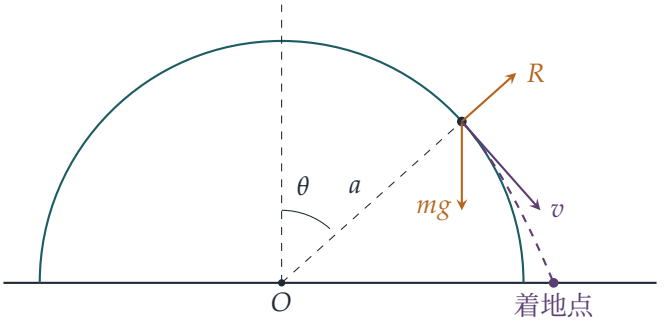
鍵となる考え方

運動は 2 つの段階に分かれる。粒子が球面上にある間は円運動をするので、エネルギー保存（energy conservation）から速さが、半径方向の運動方程式から垂直抗力（normal reaction）が求まる。粒子が球面を離れるのは、この抗力がちょうど 0 になる瞬間である。その後は、既知の点から既知の速さで接線（tangent）方向に打ち出された通常の放物体（projectile）であり、中心と同じ高さを横切る位置を求めればよい。

解答

モデル

粒子を質量 m の質点とみなし、中心 O のなめらかな固定球面上にあるとし、空気抵抗は無視する。はたらく力は重力 mg と垂直抗力 R のみであり、R は半径に沿って O から遠ざかる向きにはたらく。粒子を P とし、OP と鉛直上向きとのなす角を θ、粒子の速さを v とする。変位はわずかであるから、初速は（極限において）0 とみなす。



第 1 段階：球面上の運動

抗力は運動の向きに垂直なので仕事をせず、エネルギーは保存される。粒子は頂点から $a - a\cos\theta$ だけ下がっているので、

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mga(1-\cos\theta), \qquad \text{すなわち} \qquad v^2 = 2ga(1-\cos\theta).$$

球面上にある間は半径 a の円運動をするので、O に向かう方向の成分を考えると

$$mg\cos\theta - R = \frac{mv^2}{a} \quad \Longrightarrow \quad R = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2).$$

考えてみよう なぜ粒子はちょうど $R = 0$ となるときに球面を離れるのだろうか？

球面は押すことしかできないので、接触している間は $R \geq 0$ である。θ が 0 から増加すると、R は mg から単調に減少し、上の式は $\cos\theta = \frac{2}{3}$ を越えると $R < 0$ を与えてしまう。これは球面が粒子を内側へ引っ張ることを意味するが、そのようなことはできない。したがって接触が失われるのは

$$\cos\theta = \tfrac{2}{3}, \qquad \sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}, \qquad v^2 = 2ga(1-\tfrac{2}{3}) = \tfrac{2}{3}ga.$$

のときである。

第 2 段階：放物運動

原点を O とし、x 軸を（運動の向きに）水平に、y 軸を鉛直上向きにとる。球面を離れる瞬間、粒子の位置は

$$x_0 = a\sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}a, \qquad y_0 = a\cos\theta = \tfrac{2}{3}a,$$

であり、速度は接線方向で、水平より角 θ だけ下向きである：

$$u_x = v\cos\theta = \tfrac{2}{3}v, \qquad u_y = -v\sin\theta = -\tfrac{\sqrt{5}}{3}v, \qquad \text{ただし} v = \sqrt{\tfrac{2}{3}ga}.$$

ここで $y = y_0 + u_y t - \frac{1}{2}gt^2$ であるから、粒子が $y = 0$ に達するのは

$$\tfrac{1}{2}gt^2 + \tfrac{\sqrt{5}}{3}v\,t - \tfrac{2}{3}a = 0.$$

のときである。正の解をとると

$$t = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}v + \sqrt{\frac{5}{9}v^2 + \frac{4}{3}ga}}{g}.$$

$v^2 = \frac{2}{3}ga$ を用いると、根号の中は $\frac{10}{27}ga + \frac{36}{27}ga = \frac{46}{27}ga$ となり、また $\frac{\sqrt{5}}{3}v = \sqrt{\frac{10}{27}ga}$ である。よって

$$t = \sqrt{\frac{a}{27g}}\,(\sqrt{46} - \sqrt{10}).$$

飛行中に進む水平距離は

$$\begin{aligned} u_x t &= \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}ga}\cdot\sqrt{\frac{a}{27g}}\,(\sqrt{46} - \sqrt{10}) = \frac{2\sqrt{2}\,a}{27}(\sqrt{46} - \sqrt{10}) \\ &= \frac{2a}{27}(\sqrt{92} - \sqrt{20}) = \frac{2a}{27}(2\sqrt{23} - 2\sqrt{5}) = \frac{a}{27}(4\sqrt{23} - 4\sqrt{5}). \end{aligned}$$

である。出発時の距離 $x_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}a = \frac{9\sqrt{5}}{27}a$ を加えると、粒子が O を通る水平面に達する点の中心からの距離は

$$x_0 + u_x t = \frac{a}{27}(9\sqrt{5} + 4\sqrt{23} - 4\sqrt{5}) = \frac{a(5\sqrt{5} + 4\sqrt{23})}{27}$$

となり、示すべき結果が得られた。

飛行中に球面に触れないこと

念のため、放物体が実際に球面から離れていることを確かめておこう。飛行経路に沿って $f(t) = x^2 + y^2 - a^2$ とおき、t のべきで展開する：

- 定数項は $x_0^2 + y_0^2 - a^2 = 0$ である。
- t の係数は $2(x_0 u_x + y_0 u_y) = 0$ である。速度が半径に垂直だからである。
- t^2 の係数は $u_x^2 + u_y^2 - g y_0 = v^2 - ga\cos\theta = 0$ であり、これはまさに条件 $R = 0$ そのものである。
- 残りは $-g u_y t^3 + \frac{1}{4}g^2 t^4$ であり、$u_y < 0$ である。

したがって $t > 0$ に対して $f(t) = g|u_y|\,t^3 + \frac{1}{4}g^2 t^4 > 0$ である。粒子は球の外側にとどまり、上で求めた着地距離は実際に到達する距離である。

検算

- 答えはおよそ $1.125a$ である。これは当然 a より大きい。粒子は球を越えなければならず、球は O の高さで距離 a まで広がっているからである。
- 離れる高さが中心から $\frac{2}{3}a$ 上であることはよく知られた結果であり、g にも m にもよらない。着地距離もこれらによらないが、これは次元解析（dimensional analysis）からも要請される。問題に現れる長さは a だけだからである。

- 運動を数値的に追跡した。微小な変位から $\ddot{\theta} = (g/a)\sin\theta$ をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で積分し、$R = 0$ となったところで止めて放物運動として続けると、$1.12458a$ に着地する。厳密な式は $1.124580\ldots a$ を与える。

よくある間違い

- （$R = 0$ から得られる）$v^2 = ga\cos\theta$ を使いながら、エネルギーの式と組み合わせるのを忘れたり、誤った速さを用いたりすること。離れる瞬間には $v^2 = \frac{2}{3}ga$ であり、$\frac{1}{3}ga$ ではない。
- 放物体を水平に打ち出してしまうこと。速度は接線方向で、水平より角 θ だけ**下向き**であるから、最初から下向きの成分をもつ。
- 着地距離を中心からではなく離れた点から測ってしまい、x_0 を忘れること。

STEP のその先へ

「抗力が 0 になると接触が終わる」という条件は、**片側拘束**（unilateral constraint）の一例である。片側拘束は、針金に通したビーズから太鼓橋を越える自動車まで、力学のいたるところに現れる。解答の最後の段階で見た一致、すなわち離れる点において放物体の軌道と球面が 2 次の項まで一致するという事実は、その瞬間に放物線と円が同じ曲率（curvature）をもつことを意味している。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、円運動、拘束力、エネルギーの方法をこうした考え方で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。