解答例

STEP III 1996、第 8 問

純粋数学 ・ メビウス変換

> **STEP III 1996、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q8

鍵となる考え方

これらはメビウス変換（Möbius transformation）、すなわち一次分数変換（fractional linear transformation）であり、ほとんどすべてのことは二つの観察から導かれる。$y = T(x)$ の分母を払うと、x について一次で**かつ** y についても一次である方程式が得られるので、どちらについても解くことができる。また、$T(x)$ を定数と $1/(cx-d)$ の定数倍との和の形に書けば、T が決してとらない値がすぐにわかる。合成については、単に代入して分母を払えばよい。その結果は、各 T に行列 $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$ を対応させると最も整理しやすい。

解答

不動点

$x \neq d/c$ のとき、$T(x) = x$ は $ax - b = x(cx - d)$、すなわち

$$cx^2 - (a+d)x + b = 0. \qquad (*)$$

を意味する。まず、（$c \neq 0$ のとき）$(*)$ から除外される値 $x = d/c$ が出てこないことを確かめる。代入すると $d^2/c - (a+d)d/c + b = (bc - ad)/c \neq 0$ となるので、$(*)$ の根はすべて本当の不動点（fixed point）である。

$c \neq 0$ **のとき**、$(*)$ は二次方程式（quadratic）であり、不動点は

$$x = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4bc}}{2c}.$$

である。$(a+d)^2 > 4bc$ ならば二つ、$(a+d)^2 = 4bc$ ならば一つ、$(a+d)^2 < 4bc$ なら

ば一つもない。

$c = 0$ のとき、条件 $ad \neq bc$ は $ad \neq 0$ となるので、$d \neq 0$ であり、$T(x) = (b - ax)/d$ はいたるところで定義される。このとき $(*)$ は $(a + d)x = b$ となる。$a + d \neq 0$ ならば不動点はちょうど一つで、$x = b/(a + d)$ である。$a + d = 0$ かつ $b \neq 0$ ならば不動点はない。$a + d = 0$ かつ $b = 0$ ならば $T(x) = -ax/d = x$ であるから、T は恒等写像（identity）であり、すべての x が不動点である。

逆写像

$y(cx - d) = ax - b$ から $cxy - dy = ax - b$、よって $x(cy - a) = dy - b$ となり、したがって

$$x = T^{-1}(y) = \frac{dy - b}{cy - a}.$$

を得る。これは T と同じ形であり、

$$a' = d, \qquad b' = b, \qquad c' = c, \qquad d' = a,$$

となる。$a'd' - b'c' = da - bc \neq 0$ であるから、条件も依然として成り立つ。（$cy - a$ で割ってよいのは、$y = a/c$ が決して T の値にならないからである。次の小節を参照せよ。）この逆写像（inverse）も同じ型の変換である。

集合 S_r

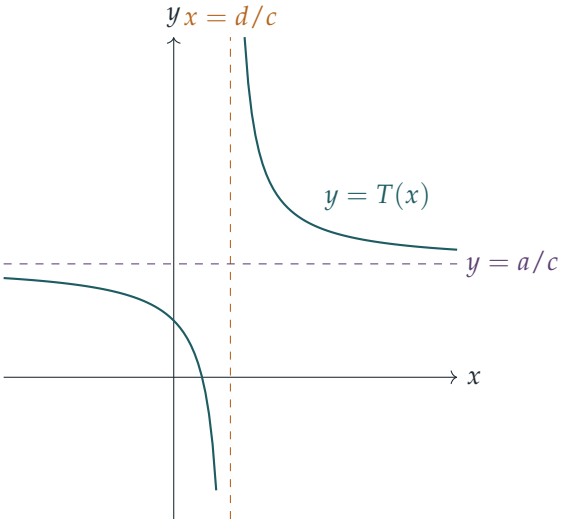
$c \neq 0$ と仮定する。$T(x)$ が定義されるのはちょうど $cx \neq d$ のときなので、$r = d/c$ とおく。すると T はすべての $x \in S_{d/c}$ で定義される。像（image）を求めるため、定数部分を分離する：

$$ax - b = \frac{a}{c}(cx - d) + \frac{ad - bc}{c}, \qquad \text{よって} \qquad T(x) = \frac{a}{c} + \frac{ad - bc}{c\,(cx - d)}.$$

$ad - bc \neq 0$ であるから第 2 項は決して 0 にならず、したがって $T(x) \neq a/c$ である。逆に、$y \neq a/c$ であるすべての値がとられる。逆写像の式から $x = (dy - b)/(cy - a)$ が得られ、この x は d/c ではない。なぜなら d/c は T^{-1} の値にならないからである（同じ議論を T^{-1} に適用すればよい。T^{-1} の「a'/c'」は d/c である）。ゆえに

$$T(S_{d/c}) = S_{a/c},$$

であり、T は $S_{d/c}$ から $S_{a/c}$ への全単射（bijection）である。グラフは、$x = d/c$ と $y = a/c$ を漸近線（asymptote）とする直角双曲線（rectangular hyperbola）である：



（この図では $T(x) = (2x-1)/(x-1) = 2 + 1/(x-1)$ を用いている。）

$c = 0$ のとき、（$ad \neq 0$ であるから）$d \neq 0$ かつ $a \neq 0$ であり、$T(x) = (b - ax)/d$ は定数でない一次関数である。よって T はすべての実数 x で定義され、除外すべき値はなく、$\mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の上へ全単射に写す。それでもなお一点 r を取り除くならば、$T(S_r) = S_{T(r)} = S_{(b-ar)/d}$ となる。

合成

$T_1(x) = \dfrac{a_1x - b_1}{c_1x - d_1}$ を T_2 に代入し、分子と分母に $c_1x - d_1$ を掛ける：

$$\begin{aligned} T_2(T_1(x)) &= \frac{a_2(a_1x - b_1) - b_2(c_1x - d_1)}{c_2(a_1x - b_1) - d_2(c_1x - d_1)} \\ &= \frac{(a_1a_2 - b_2c_1)\,x - (a_2b_1 - b_2d_1)}{(a_1c_2 - c_1d_2)\,x - (b_1c_2 - d_1d_2)}. \end{aligned}$$

よって合成（composition）T_3 は同じ形であり、

$$a_3 = a_1a_2 - b_2c_1, \quad b_3 = a_2b_1 - b_2d_1, \quad c_3 = a_1c_2 - c_1d_2, \quad d_3 = b_1c_2 - d_1d_2.$$

となる。

考えてみよう 「同じ形」であることは本当に証明されたのだろうか？$a_3d_3 \neq b_3c_3$ も必要である。

そのとおり、これは確かに必要である。これらの係数は、ちょうど行列の積

$$\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ c_2 & -d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ c_1 & -d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & -b_3 \\ c_3 & -d_3 \end{pmatrix},$$

の成分になっており、各行列の行列式（determinant）は $bc - ad$ である。積の行列式は行列式の積であるから、

$$b_3c_3 - a_3d_3 = (b_1c_1 - a_1d_1)(b_2c_2 - a_2d_2) \neq 0.$$

となる。（直接展開してもよい。数行の計算である。）よって T_3 は同じ型の変換である。

T^2 が恒等写像になるのはいつか

合成の公式で $T_1 = T_2 = T$ とおく。すると $T^2(x) = \dfrac{Ax - B}{Cx - D}$ であり、

$$A = a^2 - bc, \qquad B = b(a - d), \qquad C = c(a - d), \qquad D = bc - d^2.$$

である。T^2 が恒等写像であるのは、その定義域（domain）のすべての x に対して $Ax - B = x(Cx - D)$ が成り立つときであり、定義域は高々有限個の点を除くすべての点である。無限個の点で成り立つ多項式の等式は恒等的に成り立つので、係数を比較して

$$C = 0, \qquad A + D = 0, \qquad B = 0,$$

すなわち

$$c(a - d) = 0, \qquad (a - d)(a + d) = 0, \qquad b(a - d) = 0.$$

を得る。

- $a = d$ ならば、三つすべてが成り立つ。実際、$T^2(x) = \dfrac{(a^2 - bc)x}{-(bc - a^2)} = x$ であり、ここで $a^2 - bc = ad - bc \neq 0$ である。
- $a \neq d$ ならば、$b = c = 0$ かつ $a = -d$ が必要である。このとき $T(x) = ax/(-d) = x$ であるから、T 自身が恒等写像である。

よって T^2 が恒等写像であるのは、**$a = d$ であるか、または $b = c = 0$ かつ $a + d = 0$ であるとき、かつそのときに限る**（後者は T が恒等写像である場合である）。後者の場合は自明なので、興味深い対合（involution）は、ちょうど $a^2 \neq bc$ を満たす写像 $x \mapsto \dfrac{ax - b}{cx - a}$ である。

例

いま求めた条件により、$a = d$ である二つの写像で、その合成が $a \neq d$ となるものを見つければよい。

$$T_1(x) = -x \quad (a_1, b_1, c_1, d_1) = (1, 0, 0, 1), \qquad T_2(x) = 1 - x \quad (a_2, b_2, c_2, d_2) = (1, 1, 0, 1).$$

をとる。どちらも $a = d$ を満たすので、T_1^2 と T_2^2 は恒等写像である。これは直接確かめることもできる：$-(-x) = x$、$1-(1-x) = x$ である。両者の合成は

$$T_3(x) = T_2(T_1(x)) = 1-(-x) = x+1,$$

であり、標準形では $(a_3, b_3, c_3, d_3) = (1, -1, 0, -1)$ となるので、$a_3 \neq d_3$ である。実際 $T_3^2(x) = x+2 \neq x$ である。

幾何学的には、直線の二つの鏡映（reflection）（0 に関するものと $\frac{1}{2}$ に関するもの）を合成すると平行移動（translation）になり、平行移動は自分自身の逆写像ではない。$c \neq 0$ である例としては、同じ T_2 とともに $T_1(x) = -1/x$ を試してみよ。このとき $T_3(x) = (x+1)/x$ であり、$T_3^2(x) = (2x+1)/(x+1)$ となる。

検算

- 図の例 $T(x) = (2x-1)/(x-1)$（$a=2$、$b=1$、$c=d=1$）を用いる。その不動点は $x^2 - 3x + 1 = 0$ の根、すなわち $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$ であり、$T(2.618\ldots) = 2.618\ldots$ となることが確かめられる。その逆写像は $(y-1)/(y-2)$ であり、予想どおり $y = 2 = a/c$ で定義されない。
- 合成の公式で $T_1 = T$、$T_2 = T^{-1}$、すなわち $(a_2, b_2, c_2, d_2) = (d, b, c, a)$ とおくと、$a_3 = ad - bc$、$b_3 = 0$、$c_3 = 0$、$d_3 = bc - ad$ となる。これは恒等写像であり、そうなるべきとおりである。
- コンピュータを用いて、数千個のランダムな (a, b, c, d) について厳密な分数計算により、逆写像、像、合成の公式を検証した。また、$ad \neq bc$ を満たす $a, b, c, d \in [-3, 3]$ のすべての整数の選び方について、T^2 が恒等写像となる条件を直接の計算結果と照合した。

よくある間違い

- 自明な場合を忘れること：$a = d$ は**必要**条件ではない。恒等写像（$b = c = 0$、$a = -d$）も、2 乗すると恒等写像になるからである。
- 合成が一次式の比であることは示したが、$a_3 d_3 \neq b_3 c_3$ を確かめていないこと。
- $c = 0$ の場合に、除外される点を探してしまうこと。定数でない一次写像はいたるところで定義され、すべての実数に値をとる。

STEP のその先へ

$x = \infty$ を許し、$T(d/c) = \infty$、$T(\infty) = a/c$ と定めると、このような T はすべて拡張された実数直線（extended line）の全単射になる。係数を複素数にすると、リーマン球面（Riemann sphere）上のメビウス変換が得られる。上で用いた行列との対応は、これらの写像が群（group）をなし、それが可逆な 2×2 行列をスカラー倍を法として考えたもの（射影線形群（projective linear group））と同型（isomorphic）であることを示している。合成は行列の積になり、恒等写像以外の写像が対合であるのは、ちょうどその行列のトレース（trace）が 0 であるときである。ここではそれが $a - d = 0$ にあたる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）には、メビウス変換についての見事な章がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。