解答例

STEP III 1996、第 7 問

純粋数学 • 解の対称式

> **STEP III 1996、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q7

鍵となる考え方

両小問とも同じ事実に基づいている。3 つの数の対称式（symmetric expression）はどれも、それらの和、2 つずつの積の和、およびそれらの積を用いて表すことができ、しかもこの 3 つの量は、それらの数を解とする三次方程式（cubic）の係数にほかならない。(i) では、このことによって非線形の連立方程式が三次方程式に帰着する。(ii) では解そのものはまったく必要ない。ヘロンの公式（Heron's formula）は a, b, c について対称なので、三次方程式の係数だけで十分なのである。

解答

小問 (i)

まず平方和を求める。

$$\alpha^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx), \qquad \text{よって} \qquad x^2+y^2+z^2 = \alpha^2 - 2\beta.$$

次に因数分解（factorisation）

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),$$

を用いる。これは右辺を展開すれば確かめられる。$x\cdot xy$ や $y\cdot(-xy)$ のような 9 個の交差項は 2 つずつ打ち消し合い、$-xyz$ の形の 3 つの項が残る。代入すると、

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= 3\gamma + \alpha(\alpha^2 - 2\beta - \beta) \\ &= \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma. \end{aligned}$$

したがって $A=1, B=-3, C=3\gamma$ である。（ここで C は積の3倍なので γ に依存する。一方 A と B は単なる数である。）

では連立方程式に移ろう。$\alpha=1$ であり、平方和から

$$3=\alpha^2-2\beta=1-2\beta \quad\Longrightarrow\quad \beta=-1.$$

が得られる。さらに立方和から

$$4=\alpha^3-3\alpha\beta+3\gamma=1+3+3\gamma \quad\Longrightarrow\quad \gamma=0.$$

が得られる。

考えてみよう α,β,γ がわかった。ここからどうやって x,y,z に戻ればよいだろうか？

数 x,y,z の和が α、2つずつの積の和が β、積が γ となるのは、それらが

$$(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-\alpha t^2+\beta t-\gamma=0.$$

の3つの解であるとき、かつそのときに限る。両方向とも成り立つ。すなわち、x,y,z が連立方程式の解ならば、それらはこの三次方程式の解であり、逆にこの三次方程式の解は、どの順に並べても正しい α,β,γ をもつので、（上の恒等式により）3つの方程式をすべて満たす。いまの場合、三次方程式は

$$t^3-t^2-t=t\,(t^2-t-1)=0, \qquad \text{よって} \qquad t=0,\quad t=\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\quad t=\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

となる。したがって解は

$$\{x,y,z\}=\left\{0,\ \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\ \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right\},$$

であり、順序は任意である。3つの値はすべて異なるので、順序づけられた組 (x,y,z) は全部で6通りある。

小問 (ii)

a,b,c は三次方程式の解であるから、すべての x について

$$x^3-16x^2+81x-128=(x-a)(x-b)(x-c)$$

が成り立つ。x^2 の係数を比較すると $a+b+c=16$ であり、よって $s=8$ である。ここで工夫をする。この恒等式に $x=s=8$ を代入するのである。右辺は $(s-a)(s-b)(s-c)$ となり、これはまさにヘロンの公式に現れる積である。

$$(s-a)(s-b)(s-c)=8^3-16\cdot 8^2+81\cdot 8-128=512-1024+648-128=8.$$

したがって

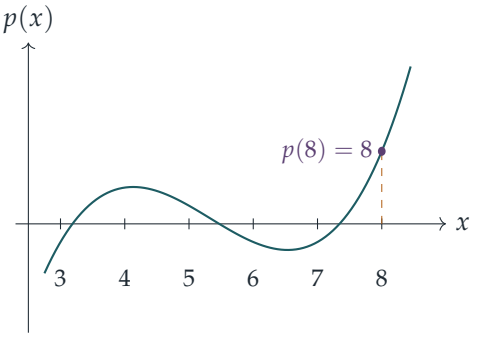
$$\text{面積}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{8\cdot 8}=8.$$

考えてみよう これらを 3 辺とする三角形は本当に存在するのだろうか？

これは確かめておくべきである。ヘロンの公式が三角形を表すのは、a, b, c が正で、しかもそれぞれが他の 2 つの和より小さいときに限られるからである。$a < b + c \iff 2a < a + b + c \iff a < s$ であるから、3 つの解がすべて実数で、正で、8 より小さいことが必要である。$p(x) = x^3 - 16x^2 + 81x - 128$ とおく。すると

$$p(3) = -2, \quad p(4) = 4, \quad p(5) = 2, \quad p(6) = -2, \quad p(7) = -2, \quad p(8) = 8,$$

であるから、符号の変化により $(3,4)$、$(5,6)$、$(7,8)$ のそれぞれに解が 1 つずつ存在する。三次方程式の解は高々 3 個なので、これらが解のすべてであり、どの解も 0 と 8 の間に（端点を除いて）ある。よって三角形は存在し、その面積は 8 である。



検算

- (i) で $x = 1, y = 2, z = 3$ を試すと、$\alpha = 6, \beta = 11, \gamma = 6$ であり、$216 - 198 + 18 = 36 = 1 + 8 + 27$ となる。
- $x = 0, y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618, z = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \approx -0.618$ のとき、和は 1 である。また $y^2 = y + 1, z^2 = z + 1$ であるから、平方和は $(y + z) + 2 = 3$、立方和は $y^2 + z^2 + (y + z) = 3 + 1 = 4$ となる。
- (ii) の解を数値的に求めると $a \approx 3.186, b \approx 5.471, c \approx 7.343$ である。これらの値でヘロンの公式を計算すると 8.000 となり、余弦定理（cosine rule）で求めた C を用いた $\frac{1}{2}ab \sin C$ も同じ値になる。

よくある間違い

- 6 通りの並べ方すべてではなく 1 組だけを答えてしまう。あるいは $t = 0$ が $t^3 - t^2 - t = 0$ の解であることを見落とす。

- 解と係数の関係（Vieta's formulas）で符号を誤る。$t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma$ では符号が交互に変わる。
- 解が本当に三角形をなすかを確かめずに面積を求めてしまう。

STEP のその先へ

対称式の基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials）によれば、x, y, z の多項式で、それらを並べ替えても変わらないものはすべて、基本対称式（elementary symmetric functions）α, β, γ の多項式として表される。ニュートン（Newton）の恒等式（Newton's identities）は、冪和（power sums）$x^k + y^k + z^k$ を漸化的に与える。これらの考え方はガロア（Galois）理論（Galois theory）へとつながっていく。ガロア理論は、三次方程式と四次方程式には解の公式があるのに、一般の五次方程式には解の公式が存在しない理由を説明するものである。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、その方向へ進むための最初の一歩として好適である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。