解答例

STEP III 1996、第 6 問

純粋数学 ・ 行列の群

> **STEP III 1996、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 6.8 節「**特異行列からなる群**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/singular-group.html

鍵となる考え方

S のどの行列も 1 つの固定された行列 $\mathbf{J}$ の定数倍であり、$\mathbf{J}^2$ もまた $\mathbf{J}$ の定数倍である。したがって S の元どうしの積は実数の積に帰着する。意外なのは、この群（group）の単位元（identity）が単位行列（identity matrix）$\mathbf{I}$ **ではない**ことである。この群は $\mathbf{I}$ をまったく必要としない。小問 (ii) は、なぜそうならざるをえないかを説明する。群の中では、どの元も他の任意の元を含む積として書くことができ、しかも行列式（determinant）は積を保つからである。

解答

小問 (i)

次のようにおく。

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{とおくと} \qquad \mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{J}.$$

S の任意の元は $a \neq 0$ として $a\mathbf{J}$ の形であり、$\mathbf{M}_a = a\mathbf{J}$ と書くことにする。

閉性（closure）。 0 でない a と b に対して

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = ab\,\mathbf{J}^2 = 2ab\,\mathbf{J} = \mathbf{M}_{2ab}.$$

$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ なので $2ab \neq 0$ であり、この積は S に属する。よって S は行列の積について閉じている。

次に、残りの群の公理（group axioms）を確かめる。

結合法則（associativity）。行列の積はすべての 2×2 行列について結合法則を満たすので、特に S の行列についても満たす。

単位元。すべての b について $\mathbf{M}_e\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_b$ となる $\mathbf{M}_e$、すなわち $2eb = b$ となるものが欲しい。そこで $e = \frac{1}{2}$ ととる。

$$\mathbf{M}_{1/2}\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_{2\cdot\frac{1}{2}b} = \mathbf{M}_b,$$

同様に $\mathbf{M}_b\mathbf{M}_{1/2} = \mathbf{M}_b$ である。よって、S に属する $\mathbf{E} = \frac{1}{2}\mathbf{J}$ は単位元である。

> **考えてみよう** 単位行列 $\mathbf{I}$ は S に含まれない。行列の群にはそれが必要なのではないか？

そうではない。群に必要なのは、その集合の他の元に対して単位元として働く**何らかの**元であり、$\frac{1}{2}\mathbf{J}$ は S のすべての元に対してその役割を果たす。これはすべての 2×2 行列に対する単位元ではない（たとえば $\frac{1}{2}\mathbf{JI} \neq \mathbf{I}$）が、$\mathbf{I}$ は S に含まれないので問題にならない。

逆元（inverses）。 $\mathbf{M}_a$ が与えられたとき、$2ac = \frac{1}{2}$ となる $\mathbf{M}_c$ が欲しい。すなわち $c = \dfrac{1}{4a}$ であり、$a \neq 0$ なのでこれは存在し、しかも 0 でない。このとき

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_{1/(4a)} = \mathbf{M}_{1/(4a)}\mathbf{M}_a = \mathbf{M}_{2a/(4a)} = \mathbf{M}_{1/2} = \mathbf{E}.$$

4 つの公理がすべて成り立つので、S は行列の積に関して群をなす。（$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_{2ab} = \mathbf{M}_b\mathbf{M}_a$ なので、可換群（abelian group）でさえある。）S のどの元も行列式が $a^2 - a^2 = 0$ であることに注意する。これらの行列は通常の意味での逆行列をもたないが、それぞれが群の中では逆元をもつ。

小問 (ii)

$\mathbf{A} \in G$ が $\det \mathbf{A} = 0$ を満たすと仮定し、$\mathbf{B}$ を G の任意の元とする。G は群なので、$\mathbf{A}$ は G の中に逆元 $\mathbf{A}'$ をもち、$\mathbf{AA}' = \mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{E}$ が成り立つ。（$\mathbf{A}^{-1}$ ではなく $\mathbf{A}'$ と書くのは、これが G の中での逆元であって、存在しない逆行列ではないからである。）

$\mathbf{C} = \mathbf{A}'\mathbf{B}$ とおく。閉性より $\mathbf{C} \in G$ であり、

$$\mathbf{AC} = \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = (\mathbf{AA}')\mathbf{B} = \mathbf{EB} = \mathbf{B},$$

となる。ここで結合法則と、$\mathbf{E}$ が G の単位元であることを用いた。したがって方程式 $\mathbf{AC} = \mathbf{B}$ は G の中に解 $\mathbf{C}$ をもつ。両辺の行列式をとり、$\det(\mathbf{XY}) = \det\mathbf{X}\det\mathbf{Y}$ を用い

ると

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}\, \det \mathbf{C} = 0 \cdot \det \mathbf{C} = 0.$$

$\mathbf{B}$ は任意だったので、G のすべての元は特異（singular）である。特に、このような群の単位元 $\mathbf{E}$ は特異であり、したがって $\mathbf{I}$ ではありえない。これは小問 (i) で見たとおりである。

考えてみよう G が単に積について閉じた集合ではなく群であることを、どこで用いたのか？

$\mathbf{B}$ を $\mathbf{A}$ と G のある元との積として書くために、逆元 $\mathbf{A}'$ と単位元 $\mathbf{E}$ を用いた。これらがなければ結果は成り立たない。たとえば $\{\mathbf{I}, \mathbf{0}\}$ は積について閉じていて特異行列を含むが、$\mathbf{I}$ は特異ではない。（これは群ではない。$\mathbf{0}$ は逆元をもたないからである。）

$n = 3$ の例。小問 (i) をまねる。次のようにおく。

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \{\, a\mathbf{K} : a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \,\}.$$

$\mathbf{K}^2$ の各成分は $1+1+1=3$ なので $\mathbf{K}^2 = 3\mathbf{K}$ であり、

$$(a\mathbf{K})(b\mathbf{K}) = 3ab\,\mathbf{K}.$$

- **閉性**：$a, b \neq 0$ ならば $3ab \neq 0$ なので、積は G に属する。
- **結合法則**：これは行列の積から受け継がれる。
- **単位元**：$(\frac{1}{3}\mathbf{K})(b\mathbf{K}) = (b\mathbf{K})(\frac{1}{3}\mathbf{K}) = 3 \cdot \frac{1}{3} b\,\mathbf{K} = b\mathbf{K}$ なので、$\mathbf{E} = \frac{1}{3}\mathbf{K}$ である。
- **逆元**：$3 \cdot a \cdot \dfrac{1}{9a} = \frac{1}{3}$ なので、$a\mathbf{K}$ の逆元は $\dfrac{1}{9a}\mathbf{K}$ である。

よって G は行列の積に関して群をなす。どの $a\mathbf{K}$ も 3 つの等しい行をもつので $\det(a\mathbf{K}) = 0$ である。つまりこれは特異な 3×3 行列からなる群である。

（同様にうまくいく別の例として、$a, b \neq 0$ である行列 $\mathrm{diag}(a, b, 0)$ 全体の集合がある。その単位元は $\mathrm{diag}(1, 1, 0)$ である。）

検算

- 具体例で確かめる：$\mathbf{M}_3\mathbf{M}_{1/12}$ の各成分は $3 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$ なので、これは $\mathbf{E} = \mathbf{M}_{1/2}$ に等しく、逆元の公式 $\frac{1}{4a}$ の予測どおりである。
- 0 でない a, b, c を無作為に数百組選び、厳密な分数計算により、2×2 と 3×3 の両方の族について閉性・単位元・逆元の公式が成り立つこと、これらの行列の行列式がすべて 0 であること、および $\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = \mathbf{B}$ が成り立つことを確認した。

よくある間違い

- $\mathbf{I}$ を単位元とみなしたり、$\mathbf{A}^{-1}$ を通常の逆行列とみなしたりすること。どちらも S には存在しない。単位元と逆元は、その群自身の積の規則から求めること。
- $2ab \neq 0$ の確認を忘れること。閉性のためには、積が正しい形をしていることおよびパラメータが 0 でないことが必要である。

STEP のその先へ

群はその演算によって定義されるのであり、元がたまたまどこに属しているかによって定義されるのではない。ここでは、群が $n \times n$ 行列の中にありながら、その単位元を共有していない。実際、$\mathbf{E}$ は常に $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$ を満たすので射影（projection）であり、この群は $\mathbf{E}$ の像の上で可逆な写像として作用する。写像 $a \mapsto \mathbf{M}_{a/2}$ は、乗法に関する 0 でない実数全体から S への同型写像（isomorphism）であり、これは直接確かめることができる。さらに学ぶには Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）を、射影については Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数の入門書）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。