解答例

STEP III 1996、第 5 問

純粋数学 ・ 倍角の公式

> **STEP III 1996、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q5

鍵となる考え方

$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^7$ を二項定理（binomial theorem）で展開し、ド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）と比較すると、$\cos 7\theta$ と $\sin 7\theta$ が多項式（polynomial）として表される。さらに全体を $\cos^7\theta$ で割ると、すべてが $t = \tan\theta$ の累乗で書ける。$\tan 7\theta$ が t の多項式の比として表されれば、$\tan 7\theta$ が 0 になる角では分子が 0 になり、$\tan 7\theta$ が定義されない角では分母が 0 になる。どちらの多項式も因数 t を除けば偶多項式（even polynomial）なので、t^2 の 3 次式（cubic）となり、あとは解と係数の関係（Vieta's formulae）で片がつく。

解答

$\tan 7\theta$ の公式

$c = \cos\theta$、$s = \sin\theta$ とおくと、ド・モアブルの定理と二項定理により

$$\cos 7\theta + \mathrm{i}\sin 7\theta = (c + \mathrm{i}s)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \mathrm{i}^k c^{7-k} s^k.$$

$\cos\theta \neq 0$ と仮定し、$t = \tan\theta$ が定義されるようにする。c^7 をくくり出すと $(c + \mathrm{i}s)^7 = c^7(1 + \mathrm{i}t)^7$ となる。$\mathrm{i}^2 = -1$、$\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$、$\mathrm{i}^4 = 1$ と二項係数 $1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$ を用いると

$$(1 + \mathrm{i}t)^7 = (1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6) + \mathrm{i}\,(7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7).$$

実部と虚部を比較すると（i 以外はすべて実数である）、

$$\cos 7\theta = \cos^7\theta\,(1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6),$$
$$\sin 7\theta = \cos^7\theta\,(7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7).$$

割り算をすると因数 $\cos^7\theta$ は約分され、分子と分母に -1 を掛けると

$$\tan 7\theta = \frac{7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7}{1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6} = \frac{t(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7)}{7t^6 - 35t^4 + 21t^2 - 1},$$

となり、求める式が得られた。

後で使うために、上の 2 行の式が何を意味するかを確認しておく。$N(t) = t(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7)$、$D(t) = 7t^6 - 35t^4 + 21t^2 - 1$ とおく。すると $\sin 7\theta = -\cos^7\theta\, N(t)$、$\cos 7\theta = -\cos^7\theta\, D(t)$ であるから、$\cos\theta \neq 0$ のとき

$$\sin 7\theta = 0 \iff N(t) = 0, \qquad \cos 7\theta = 0 \iff D(t) = 0.$$

小問 (i)

$k = 1, 2, 3$ に対して $\theta = \frac{k\pi}{7}$ とする。このとき $\sin 7\theta = \sin k\pi = 0$ かつ $\cos\theta \neq 0$ であるから、$N(\tan\theta) = 0$ である。また $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\tan\theta \neq 0$ なので、因数 t で割ってよい：

$$t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 = 0.$$

したがって $x = \tan^2\frac{\pi}{7}$, $\tan^2\frac{2\pi}{7}$, $\tan^2\frac{3\pi}{7}$ に対して、$x = t^2$ は

$$x^3 - 21x^2 + 35x - 7 = 0$$

を満たす。

> **考えてみよう** これら 3 つの数が根のすべてであり、1 つの根を何度も数えたものではないことは、どうすればわかるだろうか？

角 $\frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{3\pi}{7}$ はいずれも $(0, \frac{\pi}{2})$ に属し、そこで tan は正で狭義単調増加である。よって $\tan^2$ の 3 つの値は互いに異なる。3 次方程式の根は高々 3 個であるから、これらがちょうどその根であり、これが求める 3 次方程式である。

解と係数の関係より、根の積は 7 である：

$$\tan^2\tfrac{\pi}{7}\,\tan^2\tfrac{2\pi}{7}\,\tan^2\tfrac{3\pi}{7} = 7.$$

各角は $(0, \frac{\pi}{2})$ に属するので各正接は正であり、正の平方根をとる：

$$\tan\tfrac{\pi}{7}\,\tan\tfrac{2\pi}{7}\,\tan\tfrac{3\pi}{7} = \sqrt{7}.$$

小問 (ii)

次に $\theta = \frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}, \frac{5\pi}{14}$ とする。このとき $7\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ であるから $\cos 7\theta = 0$ であり、一方 $\cos\theta \neq 0$ である。上の注意により $D(\tan\theta) = 0$ となるので、$y = \tan^2\theta$ は

$$7y^3 - 35y^2 + 21y - 1 = 0.$$

を満たす。小問 (i) と同様に、3 つの角は $(0, \frac{\pi}{2})$ に属し互いに異なるので、$\tan^2\theta$ の 3 つの値は互いに異なり、ちょうどこの 3 次方程式の根である。解と係数の関係より、それらの和は $\frac{35}{7}$ である：

$$\tan^2\frac{\pi}{14} + \tan^2\frac{3\pi}{14} + \tan^2\frac{5\pi}{14} = 5.$$

小問 (i) を用いた手早い別解もある。$\frac{\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}$ であり、同様に $\frac{3\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7}$、$\frac{5\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}$ であるから、求める和は小問 (i) の 3 次方程式の根 x_i についての $\sum 1/x_i$ である。すなわち

$$\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{35}{7} = 5.$$

同じことであるが、小問 (i) の 3 次方程式に $x = 1/y$ を代入して分母を払うと、小問 (ii) の 3 次方程式が得られる。

検算

- $t = 1$、すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ とおく。公式は $\frac{1-21+35-7}{7-35+21-1} = \frac{8}{-8} = -1$ を与え、実際 $\tan\frac{7\pi}{4} = -1$ である。
- θ が小さいとき $\tan 7\theta \approx 7t$ であり、公式は 1 次の近似で $\frac{-7t}{-1} = 7t$ を与える。
- 数値的には $\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7} \approx 0.4816 \times 1.2540 \times 4.3813 \approx 2.6458 \approx \sqrt{7}$ であり、$\tan^2\frac{\pi}{14} + \tan^2\frac{3\pi}{14} + \tan^2\frac{5\pi}{14} \approx 0.0521 + 0.6360 + 4.3119 = 5.0000$ である。

よくある間違い

- 3 つの値が互いに異なること、したがってそれらが本当に 3 次方程式の根の**すべて**であることの説明を忘れる。
- 小問 (i) で $\pm\sqrt{7}$ と答える：3 つの正接はすべて正なので、符号は確定する。
- i の累乗による符号の誤り：$\mathrm{i}^6 = -1$、$\mathrm{i}^7 = -\mathrm{i}$ である。

STEP のその先へ

数 $\tan^2 \frac{k\pi}{7}$ は共役な代数的数（conjugate algebraic numbers）である：これらは整数係数の1つの既約（irreducible）な3次多項式の根であり、したがってそれらの任意の対称式（symmetric expression）は有理数となる。これはガロア理論（Galois theory）の出発点であり、ガロア理論は多項式の根の間の対称性を研究するものである。同じ手法から $\sum_{k=1}^{n} \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$ のような恒等式も得られ、これは $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$ のある初等的な証明に用いられる。ド・モアブルの定理と1の冪根（roots of unity）を幾何学的に眺めるには Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析）を、この種の問題をさらに解くには Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題集）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。