解答例

STEP III 1996、第 4 問

純粋数学 ・ 積を最大にする分割

> **STEP III 1996、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q4

鍵となる考え方

N の分割（splitting）の仕方を一つ残らず調べるのではなく、**最適な**（optimal）分割が何を含みえないかを考える。大きすぎる部分は積（product）を下げずに二つに分けることができ、まさにそれを測るのが冒頭の不等式（inequality）である。1 に等しい部分は無駄であり、2 が多すぎれば 3 に取り替えることができる。これらの操作の後に残る形はごくわずかであり、和 N によってそのうちの一つが選び出される。

解答

不等式

次が成り立つ。

$$k \le 2(k-2) \iff k \le 2k-4 \iff k \ge 4.$$

したがって不等式を満たす整数は $k = 4, 5, 6, \ldots$ である。さらに等号が成り立つのは $k = 4$ のときに限り、$k \ge 5$ では不等式は狭義に（strict）成り立つ：$k < 2(k-2)$。

最適な分割の形

$N \ge 2$ を固定する。N を正の整数の和として表す方法は有限個しかないので、最大の積 $P(N)$ が存在する。部分の順序は和にも積にも影響しないので、分割を部分の集まりとして扱う。積が $P(N)$ となる分割を**最適**と呼ぶ。以下で三つの観察を行う。いずれも和を N に保ったまま分割を変更するものである。

(a) **5 以上の部分はない**。部分 $m \ge 5$ を二つの部分 2 と $m-2$（どちらも正）に置き

換えると、積は $2(m-2)/m$ 倍になり、不等式の狭義の形よりこれは 1 より大きい。したがって部分 $m \geq 5$ をもつ分割は最適でない。

4 に等しい部分は、$2 \times 2 = 4$ であるから（等号の場合 $k = 4$）、積を変えずに $2+2$ に置き換えられる。したがって最適な分割の中には 3 より大きい部分をもたないものがある。以後はそのような最適な分割を考える。

(b) **1 である部分はない**。$N \geq 2$ であるから、部分 1 が唯一の部分であることはなく、ほかに部分 a が存在する。二つの部分 1 と a を一つの部分 $a+1$ に置き換えると、和は保たれ、因子 $1 \times a = a$ が $a+1 > a$ に変わる。これは積を増加させるが、最適な分割ではそれは不可能である。

(c) **2 である部分は高々二つである**。もし 2 が三つあれば、$2+2+2$ を $3+3$ に置き換えると因子 8 が 9 に変わり、やはり積が増加する。

したがって、ある最適な分割は 3 が a 個と 2 が b 個（ただし $b \in \{0,1,2\}$）からなり、

$$N = 3a + 2b, \qquad P(N) = 3^a 2^b.$$

考えてみよう 同じ N に二通りの (a,b) が当てはまり、結局それらを比較しなければならないということはありうるだろうか？

ありえない。3 を法（modulo）として考えると $2b \equiv N \pmod 3$ となり、$b = 0,1,2$ に対して $2b \equiv 0,2,1 \pmod 3$ と三つの異なる剰余（residue）が得られる。したがって N によって b が定まり、さらに $a = (N-2b)/3$ も定まる。よって

$$P(N) = \begin{cases} 3^{N/3} & \text{条件：} N \equiv 0 \pmod 3, \\ 2 \times 3^{(N-2)/3} & \text{条件：} N \equiv 2 \pmod 3, \\ 2^2 \times 3^{(N-4)/3} & \text{条件：} N \equiv 1 \pmod 3,\ N \geq 4. \end{cases}$$

$N = 5, \ldots, 9$ の場合の値

これを各 N に順に適用すると

$$\begin{aligned} 5 &= 3+2, & P(5) &= 2 \times 3, \\ 6 &= 3+3, & P(6) &= 3^2, \\ 7 &= 3+2+2, & P(7) &= 2^2 \times 3, \\ 8 &= 3+3+2, & P(8) &= 2 \times 3^2, \\ 9 &= 3+3+3, & P(9) &= 3^3, \end{aligned}$$

となり、求める結果が得られる。（$N = 7$ では分割 $4+3$ も最適である。観察 (a) で 4 を除外するのではなく**置き換える**ことしかしていないのはこのためである。）

$P(1000)$ を求める

$1000 = 3\times 332 + 4$ であるから $1000 \equiv 1 \pmod 3$ であり、$b = 2$、$a = (1000-4)/3 = 332$ となる。最適な分割は 3 が 332 個と 2 が二つであり、

$$P(1000) = 2^2 \times 3^{332}.$$

同値な言い方をすれば、最適な分割は 3 が 332 個と 2 が二つのもの、または 3 が 332 個と 4 が一つのものである。(a)–(c) の操作により、それ以外の分割は狭義に改善できることがわかるので、最適な分割はこれらに限る。

検算

- $N \le 40$ について N のすべての分割を総当たりで調べると、与えられた五つの値も含めて公式と一致する。
- $P(n) = \max_{1\le p\le n} p\,P(n-p)$ を用いた計算機による厳密な計算では $P(1000) = 4\times 3^{332}$ となり、これは 160 桁の数である。
- 妥当性の確認として、整数でない「分割」と比較してみる。N/x 個の等しい部分に分けると積は $x^{N/x}$ となり、これは $x = \mathrm{e} \approx 2.72$ で最大となる。3 が（そしてときどき 2 が）勝つのはこのためである。

よくある間違い

- $1000 = 3\times 333 + 1$ と書いて 3^{333} と答えること。この分割は 1 を含んでおり、$4 > 3$ であるから $3+1$ は $2+2$ に置き換えるべきである。
- 部分 4 は「現れえない」と述べること。最適な分割に現れることはありうる。ただ $2+2$ より良くなることがないだけである。
- $N = 5,\dots,9$ の値を列挙するだけで、それより大きいものがないことを示さないこと。それらが最大であることを証明するのは構造に関する議論である。

STEP のその先へ

ここでの議論は典型的な**極値的**（extremal）論法、あるいは**交換**（exchange）論法である。最良の対象が存在すると仮定し、それが特定の局所的なパターンを避けなければならないことを示すのである。同じ考え方は組合せ論（combinatorics）や、貪欲アルゴリズム（greedy algorithm）が最適であることの証明、整数の分割（integer partition）の理論にも現れる。連続版（$x^{N/x}$ の最大化）は微積分の手頃な演習問題である。こ

の精神に沿った問題をさらに解きたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を、合同式（congruence）と初等整数論については Davenport, *The Higher Arithmetic* を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。