解答例

STEP III 1996、第 3 問

純粋数学 ・ 半角の置換

> **STEP III 1996、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q3

鍵となる考え方

$1/(\text{定数} + \text{定数}\cdot\cos x)$ から作られる被積分関数（integrand）は、半角置換（half-angle substitution）$t = \tan\frac{1}{2}x$ を用いる典型的な場面である。この置換により、$\sin x$ と $\cos x$ の任意の有理関数（rational function）は t の有理関数に変わる。ここでは標準的な形 $\int \mathrm{d}t/(k^2+t^2)$ が現れ、逆正接（inverse tangent）が得られる。二つの「これを用いて」の結果は、それぞれの被積分関数を $1/(1-a\cos x)$ の形に変形し、a と θ を選ぶだけのことである。

解答

一般の積分

$t = \tan\frac{1}{2}x$ とおく。x が 0 から θ まで動くとき、t は 0 から $T = \tan\frac{1}{2}\theta$ まで動く。$0 < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\pi$ であるから、T は有限の正の値である。標準的な半角の公式により

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

が成り立つ。二つ目は $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1+t^2)$ による。すると

$$1 - a\cos x = \frac{(1+t^2) - a(1-t^2)}{1+t^2} = \frac{(1-a)+(1+a)t^2}{1+t^2},$$

となるので、因子 $1+t^2$ が約分されて

$$\int_0^{\theta} \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{T} \frac{2}{(1-a)+(1+a)t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{1+a}\int_0^{T}\frac{1}{k^2+t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad k^2 = \frac{1-a}{1+a}.$$

を得る。$-1 < a < 1$ であるから $1-a$ と $1+a$ はともに正であり、$k = \sqrt{(1-a)/(1+a)}$ は確かに正の実数である。（a に関する条件が使われるのはまさにここである。$|a| \geq 1$ ならば分母が 0 になりうるので、積分は広義積分（improper integral）になるか、答えが対数になる。）$\int \mathrm{d}t/(k^2+t^2) = \frac{1}{k}\tan^{-1}(t/k)$ を用いると

$$\int_0^\theta \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(1+a)k}\tan^{-1}\frac{T}{k}.$$

最後に $(1+a)k = \sqrt{(1+a)^2}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} = \sqrt{1-a^2}$ であるから

$$\boxed{\int_0^\theta \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\tan\tfrac{1}{2}\theta\right).}$$

考えてみよう なぜ $\theta < \pi$ が必要なのか。

置換 $t = \tan\frac{1}{2}x$ は $x = \pi$ で破綻する。そこでは t が無限大になってしまうからである。$\theta < \pi$ としておけば区間 $[0,\theta]$ 全体が有限区間 $[0, \tan\frac{1}{2}\theta]$ に移り、公式に特別な注意は要らない。（$\theta \to \pi$ とすると、$\tan^{-1}$ が $\frac{1}{2}\pi$ に近づくので、値は $\pi/\sqrt{1-a^2}$ となる。）

一つ目の「これを用いて」

因子 2 をくくり出す：

$$\frac{1}{2-a\cos x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}a\cos x}.$$

積分が有限であるためには $-2 < a < 2$ が必要であり、このとき $b = \frac{1}{2}a$ は $-1 < b < 1$ を満たす。よって、a を b に置き換え、$\theta = \frac{1}{2}\pi$ として一般の結果を適用できる。ここで $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$ である：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{1}{2-a\cos x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}a}{1-\frac{1}{2}a}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{4-a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{2+a}{2-a}},\end{aligned}$$

ここで $\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$ を用い、逆正接の中の分数の分子と分母をそれぞれ 2 倍した。これが求める結果である。

二つ目の「これを用いて」

今度は $\sqrt{2}$ をくくり出す：

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos x},$$

したがって $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$（これは $(-1,1)$ に属する）と $\theta=\frac{3}{4}\pi$（これは $(0,\pi)$ に属する）を用いる。すると $\sqrt{1-a^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ であり、

$$\frac{1+a}{1-a}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2,$$

となる。ここでは分子と分母に $\sqrt{2}-1$ を掛け、$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ を用いた。よって平方根は $\sqrt{2}-1$ であり、一般の公式から

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}+\cos x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1/\sqrt{2}}\tan^{-1}\Big((\sqrt{2}-1)\tan\tfrac{3}{8}\pi\Big)=2\tan^{-1}\Big((\sqrt{2}-1)\tan\tfrac{3}{8}\pi\Big).$$

を得る。

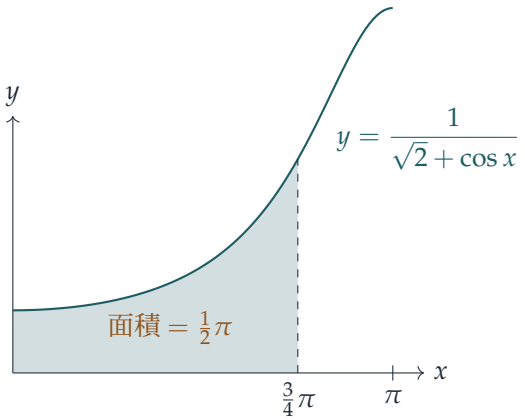
考えてみよう $\tan\frac{3}{8}\pi$ の値はいくらか。

$u=\tan\frac{1}{8}\pi>0$ として倍角の公式（double-angle formula）を用いる：$1=\tan\frac{1}{4}\pi=\frac{2u}{1-u^2}$ であるから $u^2+2u-1=0$ となり、$u=\sqrt{2}-1$（正の解）である。$\frac{3}{8}\pi=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{8}\pi$ であるから、$\tan\frac{3}{8}\pi=\cot\frac{1}{8}\pi=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$ を得る。

ゆえに $(\sqrt{2}-1)\tan\frac{3}{8}\pi=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$ であり、

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}+\cos x}\,\mathrm{d}x=2\tan^{-1}1=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$

となって、求める結果が得られた。



検算

▶ $a=0$ とすると一般の公式は $2\tan^{-1}(\tan\frac{1}{2}\theta)=\theta$ を与え、これは $\int_0^\theta 1\,\mathrm{d}x$ に等しい。同様に、一つ目の「これを用いて」で $a=0$ とすると $\frac{2}{2}\tan^{-1}1=\frac{1}{4}\pi=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$

となる。

- 枠で囲んだ答えを θ で微分すると $1/(1-a\cos\theta)$ に戻るはずである。合成関数の微分法（chain rule）のよい練習になる。
- 最後の積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると 1.5707963… となり、$\frac{1}{2}\pi$ と一致する。一般の公式と一つ目の「これを用いて」の結果も、a と θ を無作為に何百通りも選んだとき、シンプソンの公式による値と 10^{-10} 以内で一致する。

よくある間違い

- 被積分関数を $1/(1-a\cos x)$ の形に変形するときにくくり出した因子 $\frac{1}{2}$（または $\frac{1}{\sqrt{2}}$）を忘れる。
- 最後の部分で $a=+\frac{1}{\sqrt{2}}$ を用いてしまう。$\sqrt{2}+\cos x$ の符号から、a は負である。
- k を見失う。答えは $\frac{1}{k}\tan^{-1}(t/k)$ であり、$\tan^{-1}(t/k)$ でも $\frac{1}{k}\tan^{-1}(kt)$ でもない。

STEP のその先へ

置換 $t=\tan\frac{1}{2}x$（しばしばワイエルシュトラス（Weierstrass）置換と呼ばれる）がうまくいくのは、単位円を有理関数でパラメータ表示するからである。そのため、$\sin x$ と $\cos x$ の任意の有理関数は t の有理関数に帰着され、これは部分分数分解（partial fractions）によって必ず積分できる。$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x/(1-a\cos x)=2\pi/\sqrt{1-a^2}$ のような積分は、複素解析（complex analysis）における周回積分（contour integration）の標準的な最初の例でもあり、そこでは置換 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ と留数定理（residue theorem）が働く。この観点については Needham, *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚的に解説した本）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。