解答例

STEP III 1996、第 2 問

純粋数学 • 連立 1 次方程式

STEP III 1996、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/96-s3-q2

鍵となる考え方

3 つの未知数に関する 3 つの 1 次方程式は、係数の行列式（determinant）が 0 にならない限り、ちょうど 1 つの解をもつ。したがって、まずすべきことは行列式を 0 にする a の値を求めることであり、それ以外のすべての a についてはそのまま解けばよい。この問題の本質は例外的な値にあり、そこでは b に応じて、方程式が矛盾する（inconsistent）のか、それとも無数の解をもつのかを判定しなければならない。

解答

方程式に次のように番号をつける。

$$x + y + az = 2, \tag{1}$$
$$x + ay + z = 2, \tag{2}$$
$$2x + y + z = 2b. \tag{3}$$

解がただ 1 つになるのはいつか

係数行列（coefficient matrix）の行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(a-1) - 1(1-2) + a(1-2a)$$
$$= 2a - 2a^2 = 2a(1-a).$$

である。よって、$a \neq 0$ かつ $a \neq 1$ のとき、b の値によらず解はちょうど1つである。$a = 0$ と $a = 1$ の場合は別に扱う必要がある。

一般の場合：$a \neq 0, 1$

(1) から (2) を引くと

$$(1-a)y - (1-a)z = 0,$$

となり、$a \neq 1$ であるから $1-a$ で割ることができて $y = z$ を得る。$z = y$ を (1) と (3) に代入すると

$$x + (1+a)y = 2, \qquad 2x + 2y = 2b, \text{ すなわち } x + y = b.$$

となる。1つ目から2つ目を引くと $ay = 2 - b$ となり、$a \neq 0$ であるから

$$y = z = \frac{2-b}{a}, \qquad x = b - \frac{2-b}{a} = \frac{(a+1)b - 2}{a}.$$

を得る。これを (1)、(2)、(3) に代入し直すと解であることが確かめられ、上の議論によりこれが唯一の解である。

$a = 0$ の場合

方程式は

$$x + y = 2, \qquad x + z = 2, \qquad 2x + y + z = 2b.$$

となる。最初の2式を足すと $2x + y + z = 4$ を得る。よって、3つ目の方程式の左辺は 4 にも $2b$ にも等しくなければならない。

> **考えてみよう** 行列式が0であることは「解がない」ことを意味するだろうか？

それだけではそうはいえない。行列式が0であるということは、方程式が1次従属（dependent）であること、つまり方程式どうしが矛盾するか、あるいはそのうちの1つが新しい情報を何も加えないかのどちらかであることを意味する。どちらが起こるかは右辺、ここでは b によって決まる。

- $b \neq 2$ ならば $4 = 2b$ は成り立たないので、**解はない**。
- $b = 2$ ならば、3つ目の方程式は最初の2式の和にすぎないので、$x + y = 2$ と $x + z = 2$ だけが残る。$x = t$ とおくと、解は

  $$(x, y, z) = (t,\ 2 - t,\ 2 - t), \qquad t \text{ は任意の実数.}$$

  である。

$a = 1$ の場合

このとき (1) と (2) は同じ方程式 $x + y + z = 2$ となり、連立方程式は

$$x + y + z = 2, \qquad 2x + y + z = 2b.$$

となる。2 つ目から 1 つ目を引くと $x = 2b - 2$ となり、さらに $y + z = 2 - x = 4 - 2b$ を得る。この 2 つの方程式は決して矛盾しないので、b のどのような値に対しても無数の解が存在する。

$$(x, y, z) = (2b - 2,\ s,\ 4 - 2b - s), \qquad s \text{ は任意の実数.}$$

まとめ

- $a \neq 0, 1$：ただ 1 つの解 $x = \dfrac{(a+1)b - 2}{a}$、$y = z = \dfrac{2 - b}{a}$。
- $a = 0$、$b \neq 2$：解なし。
- $a = 0$、$b = 2$：任意の t に対して $(t, 2 - t, 2 - t)$。
- $a = 1$、任意の b：任意の s に対して $(2b - 2, s, 4 - 2b - s)$。

検算

$a = 2$、$b = 4$ とすると、公式から $y = z = -1$、$x = 5$ を得る。実際、$5 - 1 - 2 = 2$、$5 - 2 - 1 = 2$、$10 - 1 - 1 = 8 = 2b$ である。構造的な検算として、一般の公式は分母に a を含むので、$a = 0$ では破綻するはずである。実際に破綻し、その理由は別に行った解析が示している。$a = 1$ では公式はまだ意味をもち、$(2b - 2, 2 - b, 2 - b)$ を与えるが、これは解の族において $s = 2 - b$ としたものである。$y = z$ がもはや強制されないので、これは多くの解のうちの 1 つにすぎない。a、b およびパラメータに多数のランダムな値を与え、厳密な有理数演算によってすべての場合を検証した。

よくある間違い

- $a \neq 1$ や $a \neq 0$ であることを述べずに、$1 - a$ や a で割ってしまう。まさにこうした割り算のところに特別な場合が潜んでいる。
- 行列式が 0 ならば解がないと思い込む。$a = 1$ のときは常に無数の解があり、$a = 0$ のときも $b = 2$ ならば解が存在する。
- 無数の解からなる族を具体的に書き表すのを忘れる。「無数の解がある」と述べることは、方程式を解いたことにはならない。

STEP のその先へ

それぞれの方程式は3次元空間内の平面を表しており、この問題は3枚の平面がどのように交わりうるか、すなわち1点で交わるのか、共通の直線に沿って交わるのか、まったく交わらないのかを問うている（$a = 0$、$b \neq 2$ のとき、平面は2枚ずつ互いに平行な3本の直線に沿って交わり、角柱の側面のような配置になる）。これを体系的に扱う道具がガウスの消去法（Gaussian elimination）と行列の階数（rank）の概念である。連立方程式が解をもつのは、右辺を付け加えても階数が上がらないときであり、かつそのときに限る。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、この描像を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。