解答例

STEP III 1996、第 14 問

確率・統計 ・ 2 状態マルコフ過程

STEP III 1996、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/96-s3-q14

鍵となる考え方

時間を長さ δt の微小区間に切り分け、その一つの区間で何が起こりうるかを考える。すると、期待される回数は期待値の線形性（linearity of expectation）によって足し合わせることができ、修理中である確率は単純な「入る分から出る分を引く」という収支に従う。この収支は $\delta t \to 0$ とすると一階線形微分方程式（first-order linear differential equation）になる。$p(t)$ が求まれば、修理時間の期待値はその積分にすぎない。

解答

パンクの回数の期待値

パンクが起こりうるのは実際に自転車をこいでいる時間だけであり、こいでいる間は自転車は正常である。こいでいる時間の合計 T を長さ $\delta t = T/n$ の n 個の小区間に分ける。k 番目の小区間でのパンクの回数を X_k とする。δt の一次までの近似で、X_k は確率 $\alpha\,\delta t$ で 1、それ以外では 0 であるから、$\mathrm{E}(X_k) = \alpha\,\delta t$ である。期待値の線形性により（独立性（independence）は必要ない）、

$$\mathrm{E}(\text{パンクの回数}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k) = n\alpha\,\delta t = \alpha T.$$

ここでの時計は自転車をこいでいる時間だけを測っているので、修理に費やした時間は関係しない。

$p(t)$ の方程式

次に、t を修理を含む実際の（時計の）時間とする。時刻 t において、私は修理中（確率 $p(t)$）か、自転車をこいでいる（確率 $1-p(t)$）かのどちらかである。時刻 $t+\delta t$ に修理中であるのは、次のいずれかの場合である。

- 時刻 t に修理中であり、$(t, t+\delta t)$ の間に修理が完了しなかった場合：確率 $p(t)(1-\beta\,\delta t)$。
- 時刻 t に自転車をこいでおり、$(t, t+\delta t)$ の間にパンクした場合：確率 $(1-p(t))\,\alpha\,\delta t$。

これらは互いに排反であるから、$(\delta t)^2$ のオーダーの項（一つの微小区間で二つの事象が起こる場合）を無視すると、

$$p(t+\delta t) = p(t)(1-\beta\,\delta t) + \big(1-p(t)\big)\alpha\,\delta t.$$

整理すると

$$\frac{p(t+\delta t)-p(t)}{\delta t} = \alpha - (\alpha+\beta)\,p(t),$$

となり、$\delta t \to 0$ とすると

$$p'(t) = \alpha - (\alpha+\beta)\,p(t).$$

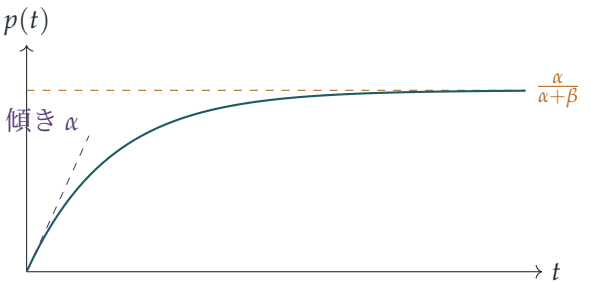
を得る。自転車は正常な状態から出発するので、初期条件（initial condition）は $p(0)=0$ である。

与えられた解の確認

$p(t) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\big(1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}\big)$ に対して $p(0) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-1) = 0$ であり、

$$p'(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t},$$
$$\alpha - (\alpha+\beta)p(t) = \alpha - \alpha\big(1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}\big) = \alpha\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}.$$

これらは一致するので、p は微分方程式と初期条件を満たす。以上で示された。



グラフは、p が 0 から初期の傾き α で増加し、長期的な水準 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ に近づいていく様子を示している。

修理時間の期待値

$[0,T]$ の間に修理に費やす時間を R とし、時刻 t に修理中ならば 1、そうでなければ 0 をとるものを $I(t)$ とする。すると $R=\int_0^T I(t)\,\mathrm{d}t$ である。$\mathrm{E}(I(t))=p(t)$ であるから、期待値をとると（これも線形性にすぎず、積分を微小区間にわたる和の極限とみなして適用している）

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R)=\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[t+\frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta}\right]_0^T\\ &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(T-\frac{1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)T}}{\alpha+\beta}\right).\end{aligned}$$

考えてみよう 修理時間の期待値が確率の積分に等しくなるのはなぜか？

各微小区間 $(t,t+\delta t)$ において、修理に費やす時間は確率 $p(t)$ でおよそ δt、それ以外では 0 であるから、その期待値は $p(t)\,\delta t$ である。すべての区間にわたって足し合わせると $\sum p(t)\,\delta t\to\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t$ となる。

二つの近似

$x=(\alpha+\beta)T$ とおく。道のりのうち修理に費やす時間の割合の期待値は

$$F=\frac{\mathrm{E}(R)}{T}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1-\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\right).$$

である。

x が小さい場合。 $\mathrm{e}^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2-\cdots$ を用いると $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}=1-\frac{1}{2}x+O(x^2)$ となるので、

$$F\approx\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{x}{2}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{(\alpha+\beta)T}{2}=\frac{\alpha T}{2}.$$

これは納得できる結果である。短い道のりでは $p(t)\approx\alpha t$ であり、その $[0,T]$ 上の平均は $\alpha T/2$ である。

x が大きい場合。 このとき $0<\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}<\dfrac{1}{x}$ であり、これは小さいので、

$$F\approx\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

長い道のりでは、ほとんどすべての時間において $p(t)$ は平衡（equilibrium）値 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ に落ち着いている。

検算

- 平衡：$p' = 0$ とおくと $\alpha(1-p) = \beta p$、すなわち「入る率と出る率が等しい」ことになり、$p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ を得る。これは T が大きいときの極限と一致する。
- $\beta \to \infty$（瞬時に修理できる）ならば、修理に関するすべての量は 0 に近づく。当然そうあるべきである。
- $\alpha = 0.7, \beta = 2.3, T = 2.5$ のとき、公式から $\mathrm{E}(R) \approx 0.5056$ を得る。2×10^5 回の道のり（指数分布に従う走行期間と修理期間を交互に繰り返す）のシミュレーションでは 0.5058 となり、走行時間 2.5 におけるパンクの回数のシミュレーションの平均は $1.750 = \alpha T$ であった。

よくある間違い

- パンクの項に因子 $(1-p(t))$ を付け忘れる。パンクが起こりうるのは自転車をこいでいる間だけである。
- $p(0) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ を用いたり、初期条件を明記しなかったりする。自転車は正常な状態から出発するので $p(0) = 0$ である。
- x が小さい場合の展開で二次の項を落としてしまい、$\alpha T/2$ ではなく $F \approx 0$ となってしまう。

STEP のその先へ

これは二状態の連続時間マルコフ連鎖（continuous-time Markov chain）である。自転車は「走行可能」と「修理中」の間をそれぞれ率 α と β で行き来し、p の方程式はコルモゴロフ（Kolmogorov）の前向き方程式（forward equations）の最も単純な場合である。同じモデルは、故障しては修理される機械、開閉するイオンチャネル（ion channel）、そして待ち行列理論（queueing theory）の多くを記述する。走行時間におけるパンクの回数は率 α のポアソン過程（Poisson process）である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、ポアソン過程とマルコフ連鎖をちょうどよい水準で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。