解答例

STEP III 1996、第 11 問

力学 ・ 微小振動

> **STEP III 1996、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q11

鍵となる考え方

円の幾何の 2 つの事実が主役である。AC は直径（diameter）なので、角 ABC は直角である。これにより、2 本の糸の長さ、したがって 2 つの張力（tension）がどちらも θ で表せる。また、中心角（angle at the centre）は円周角（angle at the circumference）の 2 倍なので、B は中心のまわりに 2θ だけ回転している。よって C から測った B の弧長（arc length）は $2a\theta$ であり、接線（tangent）方向にニュートン（Newton）の第 2 法則を適用すれば運動方程式（equation of motion）が得られる。振動については、平衡（equilibrium）のまわりで線形化（linearise）する。

始める前に注意しておく。問題文に印刷された方程式では、$mg\sin 2\theta$ であるべきところが $mg\sin\theta$ となっている。その理由は以下の導出で明らかになり、また、問題文にある $5\lambda = 24mg$ と周期を与えるのは修正後の方程式だけである。

解答

運動方程式

モデル化。輪 B はなめらかな針金上にある質量 m の質点であり、針金は半径方向の垂直抗力（normal reaction）R のみを及ぼす。糸は軽く弾性的で、フックの法則（Hooke's law）に従う。すなわち、自然長（natural length）a の糸を長さ ℓ まで伸ばしたときの張力は $\lambda(\ell - a)/a$ である。

幾何。 AC は直径（長さ $2a$）なので、半円に対する円周角の性質から $\angle ABC = 90^\circ$ である。直角三角形 ABC において

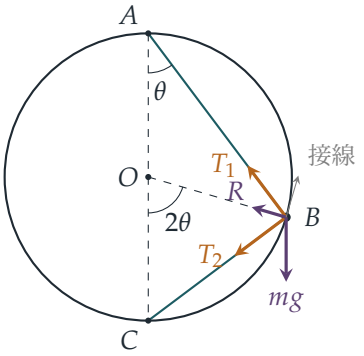
$$AB = 2a\cos\theta, \qquad CB = 2a\sin\theta.$$

円周角 $\angle CAB = \theta$ は弧 CB に対する角なので、中心角は $\angle COB = 2\theta$ である。C から B までの弧長は $s = 2a\theta$ であるから、θ が増加する向き（A に向かう向き）の、針金に沿った B の加速度は $\ddot{s} = 2a\ddot{\theta}$ である。

張力。BA と BC の張力は

$$T_1 = \lambda \frac{2a\cos\theta - a}{a} = \lambda(2\cos\theta - 1), \qquad T_2 = \lambda(2\sin\theta - 1).$$

2 本の糸がともに張っているのは、$\cos\theta > \frac{1}{2}$ かつ $\sin\theta > \frac{1}{2}$、すなわち $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$ のとき、かつそのときに限る。



B における接線方向の力の分解。接線は OB に垂直であり、R は接線方向の成分をもたない。

- 三角形 OAB は二等辺三角形 (isosceles triangle) ($OA = OB = a$) なので、$\angle OBA = \angle OAB = \theta$ である。よって BA は接線と角 $90° - \theta$ をなし、T_1 は A に向かう向きに $T_1\sin\theta$ だけ寄与する。
- 三角形 OCB は二等辺三角形であり、$\angle OCB = \angle ACB = 90° - \theta$ なので、$\angle OBC = 90° - \theta$ である。よって BC は接線と角 θ をなし、T_2 は A から遠ざかる向きに $T_2\cos\theta$ だけ寄与する。
- OB は鉛直下向きと角 2θ をなすので、接線は水平方向と角 2θ をなす。重力は A から遠ざかる向きに $mg\sin 2\theta$ だけ寄与する。

接線方向にニュートンの第 2 法則を適用すると

$$\begin{aligned} 2ma\ddot{\theta} &= \lambda(2\cos\theta - 1)\sin\theta - \lambda(2\sin\theta - 1)\cos\theta - mg\sin 2\theta \\ &= \lambda(\cos\theta - \sin\theta) - mg\sin 2\theta, \end{aligned}$$

となる。$2\lambda\sin\theta\cos\theta$ の項が打ち消し合うからである。これが求める方程式である。ただし重力の項は、印刷された $mg\sin\theta$ ではなく $mg\sin 2\theta$ である。

考えてみよう 印刷された $mg\sin\theta$ が実は正しいということはないだろうか？

そうではない。$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき輪は O と同じ高さにあり、接線は鉛直で、重さ mg がそのまま針金に沿ってはたらく。このとき $mg\sin 2\theta = mg$ となるが、$mg\sin\theta = mg/\sqrt{2}$ である。次の小問からも決着がつく。印刷された方程式では、平衡において $\frac{24}{5}mg$ ではなく $\lambda = 3mg$ となってしまうのである。

平衡

$\sin\theta=\frac{3}{5}$ のとき（θ を鋭角とすれば）$\cos\theta=\frac{4}{5}$ であり、$\frac{3}{5}>\frac{1}{2}$ かつ $\frac{4}{5}>\frac{1}{2}$ なので、θ は糸が張っている範囲にある。$\ddot{\theta}=0$ とおくと

$$\lambda\left(\tfrac{4}{5}-\tfrac{3}{5}\right)=mg\cdot 2\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{4}{5} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\lambda}{5}=\frac{24mg}{25} \quad\Longrightarrow\quad 5\lambda=24mg,$$

となり、示すべき式が得られた。

微小振動

$f(\theta)=\lambda(\cos\theta-\sin\theta)-mg\sin 2\theta$ とおくと、$2ma\ddot{\theta}=f(\theta)$ であり、平衡点 θ_0 において $f(\theta_0)=0$ である。ε を微小として $\theta=\theta_0+\varepsilon$ とおく。1 次の近似で $f(\theta_0+\varepsilon)\approx f'(\theta_0)\,\varepsilon$ であり、ここで

$$\begin{aligned} f'(\theta_0) &= -\lambda(\sin\theta_0+\cos\theta_0)-2mg\cos 2\theta_0 \\ &= -\tfrac{24}{5}mg\cdot\tfrac{7}{5}-2mg\left(\tfrac{16}{25}-\tfrac{9}{25}\right)=-\tfrac{168}{25}mg-\tfrac{14}{25}mg=-\tfrac{182}{25}mg. \end{aligned}$$

よって

$$2ma\ddot{\varepsilon}=-\tfrac{182}{25}mg\,\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad \ddot{\varepsilon}=-\frac{91g}{25a}\,\varepsilon.$$

これは $\omega^2=\dfrac{91g}{25a}$ の単振動（simple harmonic motion）である。$f'(\theta_0)<0$ なので、この平衡は安定（stable）である。変位はわずかなので、糸は張ったままである（θ は θ_0 の近くにとどまり、$(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ の十分内側にある）。周期（period）は近似的に

$$\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\cdot 5\sqrt{\frac{a}{91g}}=10\pi\sqrt{\frac{a}{91g}}.$$

検算

- $\theta=\frac{\pi}{4}$ では 2 本の糸の伸びが等しいので、接線方向の効果は打ち消し合い（$\cos\theta-\sin\theta=0$）、重さ全体が鉛直な接線に沿ってはたらく。我々の方程式は $2ma\ddot{\theta}=-mg$ を与え、これは正しい。

- $a = g = m = 1$、$\lambda = 4.8$ として、位置ベクトルから接線方向の力を計算した。この力は $\sin\theta = 0.6$ で 0 になる。微小な変位から運動を数値的に追跡すると周期は 3.29328 となり、$10\pi/\sqrt{91} \approx 3.29328$ と一致した。

よくある間違い

- 弧長を $a\theta$ としてしまう。輪は中心のまわりに θ ではなく 2θ だけ回転するので、接線方向の加速度は $2a\ddot{\theta}$ である。左辺の 2 はここから来ている。
- 接線方向ではなく弦の方向に力を分解してしまう。垂直抗力は未知なので、それを消去するために接線方向に分解するのである。

STEP のその先へ

平衡のまわりでの線形化 $\ddot{x} = f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0)$ は、非線形系（nonlinear systems）の安定性解析の第一歩である。これにより、$f'(x_0) < 0$ のとき安定であり、$\omega^2 = -f'(x_0)$ の単振動となることがわかる。大学では、これが基準振動（normal modes）と行列の固有値（eigenvalues）を通じて、多自由度（several degrees of freedom）の系へと拡張される。さらに学ぶには、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。