解答例

STEP III 1996、第 10 問

力学 ・ 摩擦のあるつり合い

STEP III 1996、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/96-s3-q10

鍵となる考え方

6 本の釣り合い（equilibrium）の式（各円柱について 2 方向への力の分解（resolution）と 1 本の力のモーメント（moment）の式）を書き下すと、それらによってすべての接触力が一意に定まることがわかる。うまくいく決め手はモーメントの式である。各円柱には中心のまわりにモーメントをもつ摩擦力がちょうど 2 つしかないので、それらの大きさは等しくなければならない。その後は、4 つの不等式はいずれも、3 本の接触線のどれかにおける「摩擦力 $\leq$ 係数 $\times$ 垂直抗力」という条件と、円柱どうしが押し合う力が負でないという条件にすぎない。

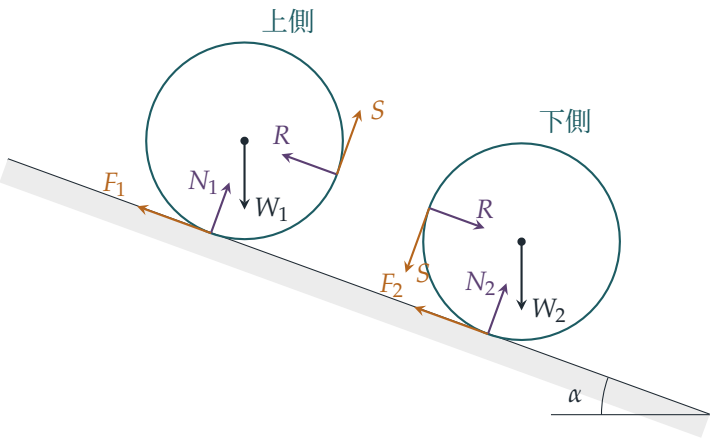
解答

モデル化。各円柱は半径 a の一様な剛体（rigid body）なので、その重力は中心（軸上）に作用する。両円柱の中心を通る鉛直な断面で考える。半径が等しく、両円柱とも斜面上にあるので、中心を結ぶ線は斜面に平行であり、円柱どうしの接触点はその線分の中点にある。x 方向を斜面に沿って**下向き**に、y 方向を斜面に垂直で斜面から外向きにとる。

力を次のように定める（どの成分も正負いずれになってもよい）。

- N_1, N_2：斜面が上側と下側の円柱に及ぼす垂直抗力（normal reaction）。
- F_1, F_2：斜面がそれらに及ぼす摩擦力（frictional force）で、斜面に沿って**上向き**を正とする。
- R：円柱どうしの間の垂直な力で、中心を結ぶ線に沿って働き、下側の円柱を斜面の下向きに、上側の円柱を斜面の上向きに押す。

- S：円柱どうしの間の摩擦力で、斜面に垂直であり、上側の円柱には斜面**から離れる**向きに、したがって（ニュートン（Newton）の第 3 法則により）下側の円柱には斜面**に向かう**向きに働く。



（見やすさのため円柱を離して描いてあるが、R と S はただ 1 本の接触線に作用する。各重力は中心を通って鉛直下向きに作用する。）

モーメント。各円柱の中心のまわりのモーメントを考える。垂直な力 N_1, N_2, R と重力はすべて中心を通るので、モーメントをもつのは摩擦力だけである。各摩擦力は中心から距離 a の点に接線方向に作用する。上側の円柱では、F_1（円柱の最下点で斜面の上向き）と S（斜面の下側の側面で斜面から離れる向き）のモーメントは逆向きなので、

$$aF_1 = aS, \qquad \text{よって} \qquad F_1 = S.$$

同様に、下側の円柱では F_2（最下点で斜面の上向き）と S（斜面の上側の側面で斜面に向かう向き）のモーメントは逆向きなので、$F_2 = S$ である。したがって

$$F_1 = F_2 = S.$$

? **考えてみよう** 斜面から各円柱に働く摩擦力が、円柱どうしの間の摩擦力と等しくなければならないのはなぜか。

自由に転がることのできる円柱が釣り合いを保つのは、軸のまわりの偶力（couple）が打ち消し合う場合に限られ、軸のまわりにモーメントをもつ力は摩擦力だけだからである。向きも確かめられる。上側の円柱では、最下点で斜面の上向きに働く斜面の摩擦力は円柱を斜面の下方へ、すなわち図では時計回りに転がそうとし、一方、斜面の下側の側面に働く上向きの摩擦力は円柱を反時計回りに回そうとする。

力の分解。斜面に平行な方向（斜面の下向きを正とする）：

$$\begin{aligned} \text{上側：}\quad & W_1 \sin\alpha - F_1 - R = 0, \\ \text{下側：}\quad & W_2 \sin\alpha - F_2 + R = 0. \end{aligned}$$

辺々を加え、$F_1 = F_2 = S$ を用いると

$$F_1 = F_2 = S = \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha,$$

となり、予想どおり、これは重力の斜面下向き成分の合計の半分である。次に辺々を引くと

$$R = \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

斜面に垂直な方向（外向きを正とする）：

$$\begin{aligned} \text{上側：}\quad & N_1 - W_1\cos\alpha + S = 0 \quad \Longrightarrow \quad N_1 = W_1\cos\alpha - \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha, \\ \text{下側：}\quad & N_2 - W_2\cos\alpha - S = 0 \quad \Longrightarrow \quad N_2 = W_2\cos\alpha + \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha. \end{aligned}$$

このように、6 本の式によって 6 つの力がすべて定まる。釣り合いが可能であるのは、これらの力が物理的に許される場合、すなわちすべての垂直抗力が負でなく、すべての摩擦力が摩擦係数（coefficient of friction）と対応する垂直抗力の積以下である場合に限る。

小問 (i)

円柱どうしは押し合うことしかできないので、$R \geq 0$ である。$\sin\alpha > 0$ であるから、これより $W_1 \geq W_2$ が得られる。

小問 (ii)

円柱どうしの接触点では $S \leq \mu R$ が必要である：

$$\tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha \leq \mu \cdot \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

左辺は正なので、これより $R > 0$、すなわち $W_1 > W_2$ でなければならない（実は重さが等しい場合は不可能である）。正の量 $\frac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha$ で割ると

$$\mu \geq \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2},$$

となり、求める不等式が得られる。

小問 (iii)

上側の円柱と斜面の接触点では $N_1 \geq 0$ かつ $F_1 \leq \mu_1 N_1$ が必要である。$F_1 > 0$ なので、2 つ目の条件からすでに $N_1 > 0$ が従う。$F_1 \leq \mu_1 N_1$ を $\frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha > 0$ で割ると

$$1 \leq \mu_1 \left(\frac{2W_1 \cos\alpha}{(W_1 + W_2)\sin\alpha} - 1 \right) = \mu_1 \left(\frac{2W_1 \cot\alpha}{W_1 + W_2} - 1 \right).$$

括弧の中は $N_1 / \left(\frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha\right)$ であり正なので、これで割ってよい：

$$\mu_1 \geq \left(\frac{2W_1 \cot\alpha}{W_1 + W_2} - 1 \right)^{-1}.$$

（釣り合いのためには括弧の中が正であること、すなわち $\tan\alpha < 2W_1/(W_1 + W_2)$ も必要である。そうでなければ上側の円柱は斜面から浮き上がってしまう。）

μ_2 に関する不等式

ここでは $N_2 = W_2\cos\alpha + \frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha$ は自動的に正であり、$F_2 \leq \mu_2 N_2$ は $\frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha$ で割ると次のようになる：

$$1 \leq \mu_2 \left(\frac{2W_2 \cot\alpha}{W_1 + W_2} + 1 \right), \qquad \text{すなわち} \qquad \mu_2 \geq \left(\frac{2W_2 \cot\alpha}{W_1 + W_2} + 1 \right)^{-1}.$$

考えてみよう 下側の円柱では符号が $+1$ なのに、上側の円柱では -1 になるのはなぜか。

円柱どうしの間の摩擦力 S は、上側の円柱を斜面から引き離し、下側の円柱を斜面に押しつける。そのため斜面は上側の円柱を弱く、下側の円柱を強く押すことになり、上側の円柱のほうが垂直抗力に対する摩擦力の比を大きくとる必要がある。

検算

- 2 つの円柱の式を加えると系全体の式が得られる。斜面からの摩擦力の合計は斜面の上向きに $(W_1 + W_2)\sin\alpha$、垂直抗力の合計は $(W_1 + W_2)\cos\alpha$ であり、1 つの剛体ブロックの場合とまったく同じである。
- $\alpha \to 0$ のとき、すべての摩擦力と R は 0 に近づき、μ_1, μ_2 に対する下限もともに 0 に近づく。水平な地面上では当然そうなるべきである。
- 数値例として $W_1 = 3$, $W_2 = 1$, $\alpha = 20^\circ$ とする。6 本の式を直接解くと $R \approx 0.342$, $S = F_1 = F_2 \approx 0.684$, $N_1 \approx 2.135$, $N_2 \approx 1.624$ となるので、$\mu \geq 2$, $\mu_1 \geq 0.320$, $\mu_2 \geq 0.421$ であり、公式と一致する。W_1, W_2, α を多数ランダムに選んだ場合にも同様に一致することを確かめた。

よくある間違い

- モーメントの式を忘れること。これがないと未知数 6 つに対して式は 4 本しかなく、問題は不定に見えてしまう。
- 円柱どうしの間の摩擦力の向きを取り違えること。そうすると最後の 2 つの答えの ± 1 が入れ替わってしまう。
- 軽いほうの円柱が下側でなければならないことを見落とすこと。上側の円柱のほうが軽いとすると、R は負でなければならなくなる。

STEP のその先へ

これは静定（statically determinate）な系である。釣り合いの式によってすべての力が定まるので、摩擦の法則は確認可能な条件となる。接触の数が式の数より多い場合（たとえば、粗い地面の上で粗い壁に立てかけたはしご）には、系は不静定（statically indeterminate）であり、剛体の静力学だけでは力がどのように分担されるかを決めることができない。そこで技術者は物体の弾性を考慮に入れる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の釣り合いとトルクを丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。