解答例

STEP III 1996、第 1 問

純粋数学 ・ 双曲線関数の累乗

> **STEP III 1996、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q1

鍵となる考え方

すべては、双曲線関数（hyperbolic functions）を指数関数（exponentials）で書き表すことから導かれる。累乗 $\cosh^n x$ は $2^{-n}(e^x + e^{-x})^n$ となり、これを二項定理（binomial theorem）で展開すると指数関数 $e^{(n-2r)x}$ の和になる。これらは $e^{\pm jx}$ という対をなして現れ、各対はひとつの $\cosh jx$ にまとまる。$\sinh^{2m} x$ に対する同様の展開は符号が交互に変わる点だけが異なるので、足したり引いたりすると項が一つおきに消える。

解答

定義と 2 つの恒等式

次のように定義する。

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

ここから直ちに 2 つの事実が従う。$\cosh x + \sinh x = e^x$ かつ $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$ であるから、

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x e^{-x} = 1.$$

定義の式を 2 乗すると $\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$、$\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$ となるので、

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \tfrac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \cosh 2x,$$

が成り立ち、これに恒等式（identity）$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を足したり引いたりすると、

$$\cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x + 1), \qquad \sinh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x - 1).$$

を得る。最後の 2 式は任意の引数について成り立つので、その中の x を $2x$ に置き換えてよい。

さて、平方の差を因数分解すると、

$$\cosh^4 x - \sinh^4 x = (\cosh^2 x - \sinh^2 x)(\cosh^2 x + \sinh^2 x) = 1 \cdot \cosh 2x = \cosh 2x,$$

となり、示すべき式が得られる。和については、平方完成（completing the square）を行い、$\cosh x \sinh x = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}) = \frac{1}{2}\sinh 2x$ を用いる。

$$\begin{aligned}\cosh^4 x + \sinh^4 x &= (\cosh^2 x + \sinh^2 x)^2 - 2\cosh^2 x \sinh^2 x \\ &= \cosh^2 2x - \tfrac{1}{2}\sinh^2 2x \\ &= \tfrac{1}{2}(\cosh 4x + 1) - \tfrac{1}{4}(\cosh 4x - 1) \\ &= \tfrac{1}{4}\cosh 4x + \tfrac{3}{4},\end{aligned}$$

これが 2 つ目の恒等式である。

係数 a_k

二項定理により、

$$\cosh^n x = \frac{1}{2^n}\left(e^x + e^{-x}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}e^{(n-2r)x}.$$

添字 r の項と添字 $n-r$ の項を組にする。$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ であるから両者の係数は等しく、指数は互いに符号が逆の $\pm(n-2r)x$ である。したがって、2 つ合わせると $2\binom{n}{r}\cosh((n-2r)x)$ となる。

> ? **考えてみよう** 実際に現れるのはどの $\cosh kx$ か。また、真ん中の項はどうなるか。

指数 $n-2r$ は $n, n-2, n-4, \ldots$ であるから、n と偶奇（parity）が一致する k だけが現れる。$k = n-2r$ とおくと、$1 \le k \le n$ に対する $\cosh kx$ の係数は、$r = \frac{1}{2}(n-k)$ として $2\cdot 2^{-n}\binom{n}{r}$ である。n が偶数のときは、組にならない真ん中の項 $r = \frac{n}{2}$ もあり、定数 $2^{-n}\binom{n}{n/2}$ を与える。よって

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}}\dbinom{n}{\frac{1}{2}(n-k)} & 1 \le k \le n \text{ かつ} n-k \text{ が偶数のとき,} \\ 0 & n-k \text{ が奇数のとき,} \end{cases} \qquad a_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{\frac{1}{2}n} & n \text{ が偶数,} \\ 0 & n \text{ が奇数.} \end{cases}$$

たとえば $\cosh^5 x = \frac{5}{8}\cosh x + \frac{5}{16}\cosh 3x + \frac{1}{16}\cosh 5x$ である。

最後の設問

$n = 2m$ とし、$\sinh^{2m} x$ を同じように展開する。

$$\sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{2m} (-1)^r \binom{2m}{r} e^{(2m-2r)x}.$$

$(-1)^{2m-r} = (-1)^r$ であるから、項 r と項 $2m-r$ はやはり組になる。したがって

$$\sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{2m} (-1)^r \binom{2m}{r} \cosh(2(m-r)x),$$

となり、これは（cosh が偶関数であることを用いて同じ形に書いた）$\cosh^{2m} x$ の展開の符号を交互にしたものである。引き算と足し算をすると、

$$\cosh^{2m} x \mp \sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{2m} (1 \mp (-1)^r) \binom{2m}{r} \cosh(2(m-r)x).$$

よって、差では奇数の r の項だけが（それぞれ 2 倍されて）残り、和では偶数の r の項だけが残る。前と同様に r と $2m-r$ の組をまとめ、$k = 2j = 2(m-r)$ と書くと、

$$\cosh^{2m} x - \sinh^{2m} x = b_0 + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ m-j \text{ 奇数}}} \frac{1}{2^{2m-2}} \binom{2m}{m-j} \cosh 2jx,$$

$$\cosh^{2m} x + \sinh^{2m} x = c_0 + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ m-j \text{ 偶数}}} \frac{1}{2^{2m-2}} \binom{2m}{m-j} \cosh 2jx,$$

を得る。ここで定数項は組にならない真ん中の項 $r = m$ から生じ、m が奇数のときは差に、m が偶数のときは和に残る。

$$b_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2m-1}} \dbinom{2m}{m} & m \text{ が奇数}, \\ 0 & m \text{ が偶数}, \end{cases} \qquad c_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2m-1}} \dbinom{2m}{m} & m \text{ が偶数}, \\ 0 & m \text{ が奇数}. \end{cases}$$

言葉でまとめると次のようになる。$\cosh kx$ の係数は、k が奇数のとき 0 である。偶数 $k = 2j \ge 2$ に対しては、$m-j$ が奇数ならば差において、$m-j$ が偶数ならば和において $2^{2-2m}\binom{2m}{m-j}$ であり、それ以外では 0 である。$m = 2$ のとき、差は $\frac{1}{4}\binom{4}{1}\cosh 2x = \cosh 2x$、和は $\frac{1}{8}\binom{4}{2} + \frac{1}{4}\binom{4}{0}\cosh 4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cosh 4x$ となり、最初に証明した恒等式が再び得られる。

検算

$x = 0$ を代入する。すべての $\cosh kx$ は 1 になるので、a_k の総和は 1 でなければならない（実際そうなる。二項係数（binomial coefficients）の総和は 2^n である）。また、最

後の 2 つの展開の係数の和もいずれも 1 でなければならない。$m = 3$ のとき、公式から $\cosh^6 x - \sinh^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cosh 4x$ および $\cosh^6 x + \sinh^6 x = \frac{15}{16}\cosh 2x + \frac{1}{16}\cosh 6x$ が得られる。$x = 1$ では、1 つ目の式の両辺はともに有効数字 4 桁で 10.87 となり、電卓で確かめられる。さらに、$n \leq 12$ および $m \leq 8$ について、ランダムに選んだ x の値ですべての公式を数値的に確認した。

よくある間違い

- 真ん中の項を 2 倍してしまう。n が偶数のとき、$r = \frac{n}{2}$ の項には相手がいないので、a_0 は $2^{-n}\binom{n}{n/2}$ であり、その 2 倍ではない。
- k と n の偶奇が異なるときは常に $a_k = 0$ であることを忘れる。
- 最後の設問で定数項が常に現れると思い込む。定数項は、差では m が奇数のときだけ、和では m が偶数のときだけ現れる。

STEP のその先へ

$\cosh x$（あるいは $\cos x$）の累乗を $\cosh kx$ の 1 次結合として書き表すことは、フーリエ解析（Fourier analysis）への最初の入り口である。e^{ikx} が自然な構成要素であり、$\cos^n x$ は係数が二項係数で与えられる有限フーリエ級数（finite Fourier series）である。逆の操作、すなわち $\cos nx$ を $\cos x$ の多項式として表すと、チェビシェフ（Chebyshev）多項式が得られ、これは近似理論（approximation theory）で重要な役割を果たす。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、指数関数による表示がなぜこれらの恒等式をすべて自然なものにするのかを示している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。