解答例

STEP II 1996、第 9 問

力学 ・ 安定性と重心

> **STEP II 1996、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q9

鍵となる考え方

すべては、おもちゃの重心（centre of mass）G が対称軸（axis of symmetry）上のどこにあるかにかかっている。半球（hemisphere）で台に接しているとき、台は常に半球の平らな面の中心 O の真下でおもちゃに接する。したがって、G が O より下にあるか上にあるかによって、「起き上がる」か「倒れる」かが決まる。円錐（cone）で台に接しているとき、おもちゃは母線（generator）全体に沿って台に載っており、G を通る鉛直線がその接触線と交わる限り、おもちゃはその位置にとどまる。

解答

おもちゃを密度 ρ の一様な剛体（rigid body）とみなし、その軸について対称であるとする。共通の円形の面の中心を O とし、軸に沿った距離を O から測り、円錐の頂点 V の向きを正とする。

重心

円錐の体積は $\frac{1}{3}\pi a^2(\lambda a) = \frac{1}{3}\lambda\pi a^3$ であり、その重心は $+\frac{1}{4}\lambda a$ にある。半球の体積は $\frac{2}{3}\pi a^3$ であり、その重心は $-\frac{3}{8}a$ にある。よって G の位置は

$$h = \frac{\frac{1}{3}\lambda\cdot\frac{1}{4}\lambda a - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}a}{\frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{12}\lambda^2 a - \frac{1}{4}a}{\frac{1}{3}(\lambda+2)} = \frac{a(\lambda^2-3)}{4(\lambda+2)}.$$

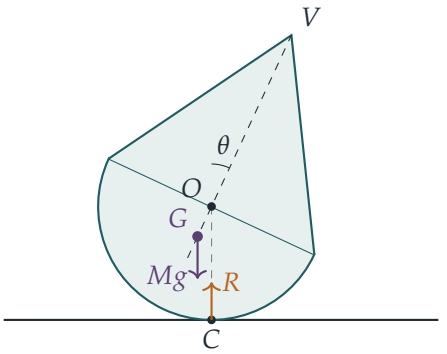
である。したがって、$\lambda < \sqrt{3}$ ならば G は O より下に、$\lambda = \sqrt{3}$ ならば O に、$\lambda > \sqrt{3}$ ならば O より上にある。

半球で台に載っている場合

軸が上向きの鉛直方向に対して角 θ（$0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$）だけ傾いており、半球の曲面が台に接しているとする。

考えてみよう 半球は台のどこで接しているのだろうか？

台は、半球をその一部とする球に接しており、接平面（tangent plane）は接点における半径に垂直である。したがって、θ の値によらず、接点 C は常に O の**真下**にあり、O は常に高さ a にある。



（図は G が O より下にある場合、すなわち $\lambda < \sqrt{3}$ の場合を示している。）

C のまわりの力のモーメント（moment）を考える。垂直抗力（normal reaction）と摩擦力（friction）はいずれも C に作用するので、モーメントをもつのは G に作用する重力 Mg だけである。C から（すなわち O を通る鉛直線から）測った G の水平方向の変位は $h\sin\theta$ であり、頂点が傾いている側を正とする。

- $\lambda < \sqrt{3}$ ならば $h < 0$ である。$0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ を満たすすべての θ について、G は C を通る鉛直線に関して頂点と反対側にある。したがって重力はおもちゃを $\theta = 0$ の向きに戻すように回転させる。同じことであるが、G の高さは $a + h\cos\theta = a - |h|\cos\theta$ であり、これは $\theta = 0$ のとき最小となるので、直立した位置が位置エネルギー（potential energy）最小の位置である。いずれにせよ、半球を下にしてどのように置いても、おもちゃは直立した位置に向かって動く（そのまわりで揺れ、やがて摩擦と空気抵抗によってその位置に落ち着く）。
- $\lambda > \sqrt{3}$ ならば $h > 0$ である。任意の傾き $\theta > 0$ について、G は頂点と同じ側にあり、重力はおもちゃを直立した位置から**さらに**遠ざけるように回転させる。このとき G の高さ $a + h\cos\theta$ は $\theta = 0$ で最大となるので、直立した位置は不安定な平衡（unstable equilibrium）である。わずかな傾きでも大きくなっていき、縁が台に達して、おもちゃは円錐の側面を下にして倒れる。すなわち、おもちゃは転倒する。

（$\lambda = \sqrt{3}$ のときは $G = O$ であり、おもちゃはどの傾きでも中立平衡（neutral equilibrium）にある。）以上で求める結果が示された。

円錐で台に載っている場合

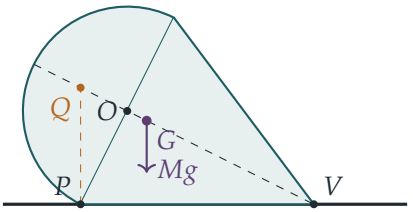
次に、おもちゃが円錐の母線 VP を台につけて横たわっているとする。ただし P は縁の上の点である。軸と VP を含む平面で考える。この平面内に、O を原点とし、$V = (0, \lambda a)$、$P = (a, 0)$ となるように座標軸をとると、半球は $y < 0$ の側にある。VP に沿った円錐の接平面はこの平面に垂直であり、この平面との交線は直線

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda a} = 1.$$

である。

考えてみよう 代わりに半球が台を突き抜けてしまい、円錐が母線に沿って台にぴったり載ることができない、ということは起こりうるだろうか？

起こらない。おもちゃのどの点も、この平面に射影すると、円錐の三角形の断面か、半円板 $x^2 + y^2 \leq a^2, y \leq 0$ のいずれかの点に移る。三角形の上では $\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda a} \leq 1$ である。半円板の上では $x \leq a$ かつ $y \leq 0$ であるから $\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda a} \leq \frac{x}{a} \leq 1$ であり、等号が成り立つのは P においてのみである。よって、おもちゃ全体はこの平面の一方の側にあり、線分 VP に沿ってのみ平面に接し、それ以外では接しない。



（図は $\lambda = 2$ の場合を示している。P における VP の垂線を破線で示した。）

抗力はすべて VP に沿って作用し、台に垂直である。したがって、おもちゃが台の上で平衡にあり、P や V のまわりに倒れないのは、G を通る鉛直線が線分 VP と交わるとき、すなわち G から VP に下ろした垂線の足が V と P の間にあるとき、かつそのときに限る。

V における VP の垂線が軸と交わるのは V においてのみである。P における VP の垂線が軸と交わる点を Q とする。三角形 VPQ において、P における角は直角であり、PO は斜辺（hypotenuse）VQ への高さであるから $OP^2 = OV \cdot OQ$ が成り立ち、

$$OQ = \frac{a^2}{\lambda a} = \frac{a}{\lambda}.$$

を得る。よって Q は O から距離 a/λ だけ下にある。軸上の点が線分 VP 上に射影されるのは、その点が Q と V の間にあるとき、かつそのときに限る。したがって

$$-\frac{a}{\lambda} < h < \lambda a.$$

が必要である。右側の不等式は、G がおもちゃの内部、V より下にあるので成り立つ。左側の不等式については、両辺に $4\lambda(\lambda+2)/a > 0$ を掛けると

$$\frac{a(\lambda^2-3)}{4(\lambda+2)} > -\frac{a}{\lambda} \iff \lambda^3 - 3\lambda + 4\lambda + 8 > 0 \iff \lambda^3 + \lambda + 8 > 0,$$

となり、これはすべての $\lambda > 0$ について成り立つ。よって、G を通る鉛直線は常に接触線と交わり、おもちゃはその位置にとどまる。回転対称性（rotational symmetry）により、どの母線が接していても同じである。以上より、λ の値によらず、おもちゃは円錐の側面を下にしたまま静止しており、求める結果が示された。

検算

- $\lambda = \sqrt{3}$ のとき、公式は $h = 0$ を与える。円錐のモーメント $\frac{1}{12}\lambda^2 a$ が半球のモーメント $\frac{1}{4}a$ とちょうど釣り合う。おもちゃを薄い円板に切り分けて数値的に足し合わせると、いくつかの λ について h が $10^{-5}a$ の精度で再現される。
- $\lambda = 1$ のとき、$h = -\frac{1}{6}a$、$OQ = a$ であり、G から下ろした垂線の足は V から P へ向かって 0.583 の割合の位置にある。$\lambda = 10$ のときは 0.790 の割合の位置にある。$(0, 50)$ の範囲で λ の値を無作為に 20,000 個選んで調べたところ、垂線の足は常に VP の真に内側にあった。
- 極限の場合：$\lambda \to 0$ のとき、おもちゃはほぼ半球であり（$h \to -\frac{3}{8}a$）、よく知られているように起き上がる。$\lambda \to \infty$ のとき、おもちゃは細長い円錐であり、G は円錐自身の重心とともに軸を上っていく。

よくある間違い

- 実際の接点ではなく、**直立した**おもちゃの最下点のまわりのモーメントを考えてしまう。実際の接点はおもちゃが転がるにつれて動くが、常に O の真下にある。
- 最後の部分で、半球も台に接していると仮定してしまう。半円板は $y \le 0$ の側にあるので、半球は台に接しない。

STEP のその先へ

この揺れるおもちゃは、平衡の安定性（stability of equilibrium）への最初の入り口である。一般に、平面上を転がる物体は、その重心が接点における表面の曲率中心（centre of curvature）（ここでは O）より下にあるとき安定である。同じ考え方が、浮かんでいる船のメタセンター（metacentre）を支配している。大学 1 年生の講義では、これは位置エネルギーの極小と、そのまわりの微小振動（small oscillations）の研究へと発展する。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような観点から重心と剛体の平衡を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。