解答例

STEP II 1996、第 8 問

純粋数学 • 2 階の微分方程式

> **STEP II 1996、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q8

鍵となる考え方

この方程式には $\mathrm{f}(x)$ と $\mathrm{f}(-x)$ が混在しているので、そもそも f についての通常の微分方程式（ordinary differential equation）ではない。そこで、方程式を x における式と $-x$ における式の 2 通りに書き、それらを足したり引いたりするのがうまいやり方である。和 g と差 h はそれぞれ正真正銘の定数係数（constant-coefficient）の方程式を満たし、それは余関数（complementary function）と特殊解（particular integral）を用いて解くことができる。そして f は $\frac{1}{2}(\mathrm{g}+\mathrm{h})$ として復元される。

解答

$\mathrm{g}(0)$ と $\mathrm{g}'(0)$ の値

$\mathrm{g}(x)=\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(-x)$ に $x=0$ を代入すると $\mathrm{g}(0)=2\mathrm{f}(0)=2$ である。

微分すると、合成関数の微分法（chain rule）により第 2 項にはマイナス符号がつき、

$$\mathrm{g}'(x)=\mathrm{f}'(x)-\mathrm{f}'(-x),$$

となるので、求めるとおり $\mathrm{g}'(0)=\mathrm{f}'(0)-\mathrm{f}'(0)=0$ である。（$\mathrm{f}'(0)$ の値は必要なかったことに注意しよう。g は偶関数（even function）なので、その導関数は奇関数（odd function）となり、0 で値が 0 になるのである。）

g の満たす方程式

もう一度微分すると、合成関数の微分法から出る 2 つのマイナス符号は打ち消し合う：

$$\mathrm{g}''(x)=\mathrm{f}''(x)+\mathrm{f}''(-x).$$

考えてみよう $\mathrm{f}''(-x)$ とは何か。与えられた方程式は $\mathrm{f}''(x)$ についてしか教えてくれない。

与えられた方程式はすべての x について成り立つので、全体にわたって x を $-x$ に置き換えてよい。cos は偶関数であるから、

$$\mathrm{f}''(-x) + \mathrm{f}(x) = -x + 3\cos 2x.$$

を得る。これをもとの方程式に加えると、

$$\mathrm{f}''(x) + \mathrm{f}''(-x) + \mathrm{f}(-x) + \mathrm{f}(x) = 6\cos 2x, \qquad \text{すなわち、} \qquad \mathrm{g}''(x) + \mathrm{g}(x) = 6\cos 2x,$$

となり、求める式が得られた。

g を求める

補助方程式（auxiliary equation）$m^2 + 1 = 0$ の根は $\pm\mathrm{i}$ なので、余関数は $A\cos x + B\sin x$ である。特殊解として $\mathrm{g} = k\cos 2x$ を試すと、$\mathrm{g}'' + \mathrm{g} = -4k\cos 2x + k\cos 2x = -3k\cos 2x$ となるので $k = -2$ である。したがって

$$\mathrm{g}(x) = A\cos x + B\sin x - 2\cos 2x.$$

ここで $\mathrm{g}(0) = A - 2 = 2$ より $A = 4$、また $\mathrm{g}'(0) = B = 0$ である。よって

$$\mathrm{g}(x) = 4\cos x - 2\cos 2x.$$

h を求める

$\mathrm{h}(x) = \mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(-x)$ については

$$\mathrm{h}(0) = 0, \qquad \mathrm{h}'(x) = \mathrm{f}'(x) + \mathrm{f}'(-x), \quad \text{よって} \quad \mathrm{h}'(0) = 2\mathrm{f}'(0) = -2,$$

であり、$\mathrm{h}''(x) = \mathrm{f}''(x) - \mathrm{f}''(-x)$ である。今度は x における方程式から $-x$ における方程式を引く：

$$\mathrm{f}''(x) - \mathrm{f}''(-x) + \mathrm{f}(-x) - \mathrm{f}(x) = 2x, \qquad \text{すなわち、} \qquad \mathrm{h}''(x) - \mathrm{h}(x) = 2x.$$

考えてみよう h の前の符号が $+$ から $-$ に変わったのはなぜか。

引き算では f の項が $\mathrm{f}(-x) - \mathrm{f}(x)$ の形で現れ、これは $+\mathrm{h}(x)$ ではなく $-\mathrm{h}(x)$ である。そのため今度の解は三角関数ではなく指数関数になる。補助方程式 $m^2 - 1 = 0$ から余関数 $C\mathrm{e}^x + D\mathrm{e}^{-x}$ が得られる。特殊解として $\mathrm{h} = px + q$ を試すと $-(px + q) = 2x$ となるので、$p = -2$、$q = 0$ である。したがって

$$\mathrm{h}(x) = C\mathrm{e}^x + D\mathrm{e}^{-x} - 2x.$$

条件から $\mathrm{h}(0) = C + D = 0$ および $\mathrm{h}'(0) = C - D - 2 = -2$ が得られるので、$C = D = 0$ であり、

$$\mathrm{h}(x) = -2x.$$

f を復元する

g と h の定義を足し合わせると $\mathrm{g} + \mathrm{h} = 2\mathrm{f}$ となるので、

$$\mathrm{f}(x) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{g}(x) + \mathrm{h}(x)) = \tfrac{1}{2}(4\cos x - 2\cos 2x - 2x) = 2\cos x - \cos 2x - x,$$

となり、これが求める結果である。

検算

- $\mathrm{f}(0) = 2 - 1 - 0 = 1$ であり、$\mathrm{f}'(x) = -2\sin x + 2\sin 2x - 1$ より $\mathrm{f}'(0) = -1$ である。
- 代入して確かめる：$\mathrm{f}''(x) = -2\cos x + 4\cos 2x$ と $\mathrm{f}(-x) = 2\cos x - \cos 2x + x$ を足すと $x + 3\cos 2x$ になる。
- 偶奇性も正しい：g は偶関数、h は奇関数となっており、そうでなければならない。
- $\mathrm{f}(x)$、$\mathrm{f}(-x)$ の組を $x = 0$ から $x = 3$ まで数値的に進めると $\mathrm{f}(3) \approx -5.940155$ となり、$2\cos 3 - \cos 6 - 3$ と一致する。

よくある間違い

- 合成関数の微分法による符号を忘れる：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{f}(-x) = -\mathrm{f}'(-x)$ であるが、$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{f}(-x) = +\mathrm{f}''(-x)$ である。
- 方程式の片側だけで x を $-x$ に置き換える：右辺の x も $-x$ になる。
- $\mathrm{h}'' + \mathrm{h} = 2x$ を導いてしまい、h に三角関数の項が現れてしまう。

STEP のその先へ

これは関数微分方程式（functional differential equation）であり、未知関数が 2 点以上で評価されている。偶関数部分と奇関数部分に分けるとうまくいくのは、反転 $x \mapsto -x$ が 2 乗すると恒等写像（identity）になる線形写像（linear map）だからである。そのためその固有値（eigenvalue）は ± 1 であり、すべての関数は偶関数部分（固有値 1）と奇関数部分（固有値 -1）にただ 1 通りに分解される。それぞれの部分の上では、方程式は通常の微分方程式になる。対称性によって分解するというこの考え方は、線形代数

（linear algebra）やフーリエ解析（Fourier analysis）の全体に通じている。定数係数の方程式そのものについては Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）を、線形代数の観点については Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。